LÖSNING TILL DIRICHLETS PROBLEM PÅ ENHETSSKIVAN:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{PÅ } \mathbb{D} \\ u(e^{i\theta}) = g(\theta) \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

6.12)

$$g(\theta) = 2 + \cos 3\theta + \sin 4\theta$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos 3\theta + \sin 4\theta)(\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (2\cos n\theta + \cos 3\theta \cdot \cos n\theta - i \sin 4\theta \cdot \sin n\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ 2\cos n\theta + \frac{\cos (n+3)\theta + \cos (n-3)\theta}{2} - i \cdot \frac{\cos (n-4)\theta - \cos (n+4)\theta}{2} \right\} d\theta$$

OBS
$$\int_0^\pi \cos k\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi, & k=0 \\ 0, & \text{ANNARS} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = 0 \quad \text{om} \quad n \notin \{0, \pm 3, \pm 4\}$$

$$c_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \pi = 2, \qquad c_{\pm 3} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \qquad c_{\pm 4} = -i \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pm \pi}{2} = \mp \frac{i}{2}$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = 2 + \frac{1}{2} \cdot r^3 \cdot e^{i3\theta} + \frac{1}{2} \cdot r^{|-3|} \cdot e^{-i3\theta} - \frac{i}{2} \cdot r^4 \cdot e^{i4\theta} + \frac{i}{2} \cdot r^{|-4|} \cdot e^{-i4\theta}$$

$$= 2 + \frac{r^3}{2}(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) + i \cdot \frac{r^4}{2}(-e^{i4\theta} + e^{-i4\theta})$$

$$= 2 + r^3 \cdot \cos 3\theta + r^4 \cdot \sin 4\theta$$

SVAR: $u(r,\theta) = 2 + r^3 \cdot \cos 3\theta + r^4 \sin 4\theta$

6.16 BESTÄM FULLST. ORTOGONALT SYS. I $L^2(0,\pi)$ SOM LÖSER

$$\begin{array}{ll} (E) & \begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & 0 < x < \pi \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases} \\ (B) & \end{array}$$

LÅT $Au = -u''$. DÅ KAN ~~[illegible]~~ $\overset{(E)}{\text{SKRIVAS}}$ $Au = \lambda u$,

D.V.S. PROBLEMET ÄR ETT S-L PROBLEM MED $a = 0, b = \pi$,

$A_0 = 1, A_1 = 0, B_0 = 0, B_1 = 1$.

VI HAR SETT LÖSN. TILL (E) TIDIGARE.

$$u(x) = \begin{cases} C \cdot e^{i\lambda^{1/2}x}, & \lambda > 0 & (i) \\ C_1 x + C_0, & \lambda = 0 & (ii) \\ C e^{|\lambda|^{1/2}x}, & \lambda < 0 & (iii) \end{cases}$$

(B) GER ATT (ii) & (iii) ENDAST HAR TRIVIALA LÖSNINGAR.

BETRAKTA (i)

$u(0) = 0 \longrightarrow$ BETRAKTA $\operatorname{Im}\{Ce^{i\lambda^{1/2}x}\} = C \cdot \sin \lambda^{1/2}x$

$u'(\pi) = 0 \iff 0 = C \cdot \lambda^{1/2} \cdot \cos \lambda^{1/2} \cdot \pi \iff \lambda^{1/2}\pi = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

EGENVÄRDENA ÄR SÅLEDES

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{1}{2} + n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

MOTSVARANDE EGENVEKTORER ÄR $\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$.

SVAR: ENLIGT STURM-LIOUVILLES SATS ÄR $\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}_{n=1}^{\infty}$ ETT FULLSTÄNDIGT ORTOGONALT SYSTEM. DET LÖSER (E)+(B) ENLIGT OVANSTÅENDE ARGUMENT.

STURM-LIOUVILLE PROBLEM:

$(*)$ $\quad Au = -\frac{1}{w}\left((pu')' + qu\right)$, $\quad w, p, q \in C(a,b)$ REELLVÄRDA

$w > 0$, $p(a) \neq 0 \neq p(b)$

$$D_A = \{ u \in C^2(a,b) : Au \in L^2([a,b], w), \ u \text{ UPPFYLLER } (B) \}$$

(B) $\begin{cases} A_0 u(a) + A_1 u'(a) = 0 \\ B_0 u(b) + B_1 u'(b) = 0 \end{cases}$ $\qquad (A_0, A_1) \neq (0,0) \neq (B_0, B_1)$

(E) $\quad Au = \lambda u$

$(*) + (B) \Rightarrow A$ SYMMETRISK LINJÄR OPERATOR $A : D_A \to L^2([a,b], w)$

SATS 6.1: OPERATORN A HAR EGENV. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

EGENVEKTORERNA $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ÄR FULLSTÄNDIGT ORTOGONALT SYSTEM I $L^2([a,b], w)$.

FOURIER TRANSFORMEN:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

7.1) BERÄKNA FOURIERTRANSFORMEN

a) $f(t) = t$, $|t|<1$ $\qquad f(t) = 0$, $|t| \geq 1$.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} t \cdot e^{-i\omega t}\, dt \overset{\omega \neq 0}{\underset{!}{=}} \left[t \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\, dt$$

$$= \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} + \frac{1}{i\omega} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-1}^{1} = \frac{-2i \sin \omega}{-i\omega} + \frac{1}{\omega^2} \left(e^{-i\omega} - e^{i\omega} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \cdot (-2i \sin \omega) = (2\omega - 2i) \cdot \frac{\sin \omega}{\omega^2}$$

$$\hat{f}(0) = \int_{-1}^{1} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0$$

b) $f(t) = 1 - |t|$ OM $|t|<1$, 0 ANNARS

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\, e^{-i\omega t}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sin ÄR} \\ \text{UDDA}}}{=} 2 \int_{0}^{1} (1-t) \cdot \cos \omega t\, dt$$

$$\overset{\omega \neq 0}{\underset{!}{=}} 2 \left\{ \left[(1-t) \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega}\, dt \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{\omega^2} \left[-\cos \omega t \right]_0^1 \right\} = \frac{2}{\omega^2} \left(-\cos \omega + 1 \right) = \frac{2}{\omega^2} \left(1 - \cos \omega \right)$$

c) $f(t) = \sin t$

OBS! $f \notin L^1$ TY $\int_{\mathbb{R}} |\sin t|\, dt = \infty$. SÅ $\hat{f}$ EJ DEF.

$$\widehat{e^{jat} f(t)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a) \qquad \Big| \qquad \widehat{f'}(\omega) = j\omega \cdot \hat{f}(\omega)$$

7.5 BERÄKNA F-TRANSF. AV a) $f(t) = e^{-|t|} \cdot \cos t$

b) $f(t) = e^{-|t|} \cdot \sin t$

BETRAKTA $h(t) = e^{-|t|}$ OCH $h(t) \cdot e^{it}$. OBS:

$$\operatorname{Re}\{h(t)e^{it}\} = f(t)$$
$$\operatorname{Im}\{h(t)e^{it}\} = g(t)$$

FRÅN EX 7.1 (S. 167) FÅR VI $\hat{h}(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$.

ENLIGT OVAN

$$\widehat{e^{it} h(t)}(\omega) = \hat{h}(\omega - 1) = \frac{2}{1+(\omega-1)^2}$$

F-TRANSFORM ÄR LINJÄR SÅ

$$\widehat{f(t) + jg(t)}(\omega) = \hat{f}(\omega) + j\hat{g}(\omega) = \frac{2}{1+(\omega-1)^2}$$
$$\| $$
$$\widehat{h(t)e^{it}}(\omega)$$

PÅ SAMMA SÄTT

$$\hat{f}(\omega) - j\hat{g}(\omega) = \widehat{h(t)e^{-it}}(\omega) = \hat{h}(\omega+1) = \frac{2}{1+(\omega+1)^2}$$

SÅ

$$2\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+(\omega-1)^2} + \frac{2}{1+(\omega+1)^2}$$

$$2i\hat{g}(\omega) = \frac{2}{1+(\omega-1)^2} - \frac{2}{1+(\omega+1)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{1+(\omega-1)^2} + \frac{1}{1+(\omega+1)^2} \\ &\Rightarrow \hat{g}(\omega) = \frac{i}{1+(\omega+1)^2} - \frac{i}{1+(\omega-1)^2} \end{aligned}}$$