16-18, Q31

5.5: 3, 4, 5, 6, 13*, 14*

6.1: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 30*, 31*

6.2: 3, 7, 8, 14, 21, 24, 36*, 38

6.3: 1, 5, 6, 7, 19

6.4: 1, 3, 7, 9

- LAPLACE TRANSFORM: $\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$, $\quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}$ IS LINEAR (SO IS $\mathcal{L}^{-1}$)
- $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$ $\qquad \mathcal{L}\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$

  $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$ $\qquad \mathcal{L}\{f'\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$
- f, g CONT., $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g \Rightarrow f = g$
- f, g PIECEWISE CONT., $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g \Rightarrow f = g$ EXCEPT AT DISCONT.
- HEAVISIDE $u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$. $\quad \mathcal{L}\{u_c\}(s) = \frac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\}(s) = e^{-cs}\mathcal{L}\{f\}(s)$, $s > a$ (TRANSLATION $\leftrightarrow$ MULT.)
- $\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-c)$, $s > a+c$
- $\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{f * g\}$
- REGULJÄR SINGULÄR PUNKT x_0 TILL $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ (UTAN GEMENSAMMA FAKTORER)

  $\lim (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ OCH $\lim (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ EXISTERAR

TAVLA: 6.1.5, 6.2.14, TEN. 5b

RÄKNA: 6.2, 1-3

6.1.5

c) $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \cdot t^n \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} \cdot n t^{n-1} \, dt$

$= \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \, dt = \frac{n}{s} \cdot \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \qquad \text{(i)}$

$\left((fg)' = f'g + fg' \qquad \int f'g = fg - \int fg' \right)$

$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} \, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad \text{(ii)}$

$\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s} \cdot \mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s^3}$

$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3}{s} \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3 \cdot 2}{s^4}$

$\vdots$

GISSAR: $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \geq 0 \qquad \text{(iii)} \qquad \boxed{E(n)}$

OVANSTÅENDE VISAR ATT $\mathcal{L}\{t^0\} = \frac{1}{s}$ (ENLIGT (ii)).

ANTAG ATT $\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$, DÅ FÖLJER FRÅN (i) ATT

$\mathcal{L}\{t^n\} \underset{\uparrow \text{(i)}}{=} \frac{n}{s} \cdot \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \underset{\uparrow \text{INDUKTIONS-ANTAGANDET}}{=} \frac{n}{s} \cdot \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

VILKET BEVISAR (iii).

---

1) UTRÄKNING GER ATT (i) OCH (ii) ÄR SANNA

2) ANTAGANDET ATT (iii) GÄLLER FÖR NÅGOT k GER (TILLSAMMANS MED (i)) ATT (iii) ÄVEN GÄLLER FÖR $k+1$

3) BASFALLET (ii) SAMT OVANST. ANNAT BEVISAR ATT (iii) GÄLLER FÖR ALLA $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

INDUKTION: VISA ATT: (1) $E(0)$ ÄR SANN

(2) $E(n) \Rightarrow E(n+1)$

DÅ GÄLLER ATT $E(n)$ ÄR SANN FÖR ALLA $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ENLIGT INDUKTIONSPRINCIPEN.

$\boxed{6.2.14}$ LÖS D.E. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

LAPLACETRANSFORMERA EKV.:

$$0 = \mathcal{L}(0) = \mathcal{L}\{y'' - 4y' + 4y\} \overset{\text{LINEARITET}}{=} \mathcal{L}\{y''\} - 4\,\mathcal{L}\{y'\} + 4\,\overbrace{\mathcal{L}\{y\}}^{Y(s)}$$

$$= s\cdot\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) - 4\cdot(s\cdot\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 4\cdot Y(s)$$

$$= s\cdot(s\cdot\mathcal{L}\{y\} - y(0)) - 3 - 4\cdot(s\cdot Y(s) - 1) + 4\,Y(s)$$

$$= s^2\,Y(s) - s + 1 - 4s\,Y(s) + 4\,Y(s)$$

$$= (s^2 - 4s + 4)\,Y(s) - s + 1$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - 4s + 4} = \frac{s-1}{(s-2)^2}, \quad \underline{s \neq 2}$$

HITTA INVERSTRANSFORMEN:

$$\frac{s-1}{(s-2)^2} = \frac{a}{(s-2)^2} + \frac{b}{s-2} = \frac{a + b(s-2)}{(s-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a - 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$\| $$

$$\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2}$$

TABELL GER:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cdot f(t)\} = F(s-2) \qquad (\text{DÄR } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\})$$

D.V.S.

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cdot 1\} = \frac{1}{s-2}, \qquad \mathcal{L}\{e^{2t}\cdot t\} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\frac{s-1}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} + \mathcal{L}\{e^{2t}\cdot t\} \overset{\text{LINEARITET}}{=} \mathcal{L}\{e^{2t} + t\cdot e^{2t}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)^2}\right\} = e^{2t} + t\cdot e^{2t}$$

OBS. OM f KONT. OCH $\mathcal{L}f$ EXIST.
DÅ GÄLLER FÖLJANDE:

$$\mathcal{L}f = 0 \Rightarrow f = 0$$

D.V.S. $\mathcal{L}\{f\} = G(s) = \mathcal{L}\{g\}$
f, g KONT. $\Rightarrow f = g$

__SVAR:__ $y(t) = (1+t)\cdot e^{2t}$

TEN 2014-01-07

(5) a) BESTÄM POTENSSERIELÖSNING TILL

$$(*) \quad (1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

ANSÄTT $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. DÅ

$$y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

SÄTT IN I $(*)$:

$$0 = (1+x^2)\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq 1} 2n a_n x^n}_{\text{KAN SUMMERA FRÅN 0 UTAN ÄNDRING}} + \sum (-2)a_n x^n$$

$$\sum_{k\geq 0} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 2n a_n - 2a_n\right) x^n$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) + 2n - 2)a_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)(n-1)a_n$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1} a_n} \qquad (**)$$

BEGYNNELSEVILLKOREN ÄR $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. SER ATT $a_{2n+1} = 0$, $\forall n \geq 0$.

FÖR JÄMNA a_n RÄKNAR VI

$$a_2 = -\frac{-1}{1} a_0 = 1, \quad a_4 = -\frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{3}, \quad a_6 = -\frac{3}{5} a_4 = \frac{1}{5}$$

GISSA: $\boxed{a_{2n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$ $(***)$

1) $a_0 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{-1} = 1$ OK

2) ANTAG $a_{2(n-1)} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-3}$. DÅ GER $(**)$

$$a_{2n} = -\frac{(2n-2)-1}{(2n-2)+1} a_{2n-2} = -\frac{2n-3}{2n-1} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-3} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

INDUKTION GER $(***)$ HÅLLER FÖR ALLA $n \geq 0$.