

LABBA MED PRIMTAL OCH DELBARHET

ANDREAS WANNEBO

Vi ska studera egenskaper för heltalen. Det finns heltal såsom 1,2,3,4,... De är de positiva heltalen och det är dem vi vill studera.

Först kan man ställa frågan hur de positiva heltalen fungerar när man multiplicerar? Exempelvis så kan talet 15 skrivas som $15 = 3 \times 5$ eller $15 = 3 \cdot 5$ såsom vi föredrar att skriva multiplikation.

På samma sätt kan talet 12 skrivas som $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Men det går inte att skriva 2,3 eller 5, som dyker upp här, som nya produkter av ännu mindre positiva heltal.

Talen 2, 3 och 5 är de minsta byggstenarna för de positiva heltalen 12 och 15.

Sådana minsta byggstenar kallas primtal.

Talet 1 är ett specialfall och brukar inte kallas primtal trots att det ju också är en minsta byggsten.

Praktisk erfarenhet gör gällande att det går att skriva alla positiva heltal som produkter av enbart primtal.

En sådan erfarenhet går att göra till en matematisk sanning genom att göra ett bevis.

– Vad är ett då ett bevis i matematiken?

Forts. nästa sida.

=====

Detta är ett arbetshäfte för intresserade.

Förkunskaper – endast minimala.

Häftet är egentligen tänkt för intresserade i mellanstadiet och högstadiet. Givetvis kan det passa andra också.

Tanken är att man ensam eller tillsammans med en kompis går igenom text och uppgifter.

Kom ihåg att det går att hoppa över något som är för svårt och fortsätta vidare. Eventuellt kan man komma tillbaka till detta vid ett senare tillfälle.

Författaren har email-adress: wannebo@math.kth.se.

Hör gärna av er!

=====

Ett enkelt svar är att ett bevis är ett resonemang. Det kan vara långt eller kort, det kan vara enkelt eller komplicerat. Ett bevis bygger ofta på andra bevis. Detta möjliggör att matematiken kan ha en mycket komplicerad struktur. Språket i resonemangen kan sägas vara enkelt, ja torftigt. Dock är precisionen och säkerheten oöverträffad.

Vidare brukar man använda speciella ord för de resultat som kommer till genom bevis. Ordet **sats** är ett av dem och vi håller oss till detta ord texten.

- Jämför t.ex. med modern filosofi! Ofta avancerat språk och oöverträffad osäkerhet.
- En avvikelse. Förlåt!

Formlerna, som anses så typiska för matematiken, började införas först på 1500-talet med symboler för bland annat räknesätten, $+$, $-$, ... (François Vieta, Frankrike.)

Här skulle man kunna säga "I begynnelsen var ordet" som i bibelns skapelseberättelse. Formlerna kan ses mera som matematikens stenografi. De komprimerar orden. (Mycket!)

Visst fanns det tidigt resonemang av matematisk karaktär, men i och med den grekiska kulturens framsteg några hundra år före Kristus lyckades man sätta sådana resonemang i system.

I stället för enbart enstaka och fåtaliga fall kunde man behandla allmänna frågeställningar.

Detta innebar att det uppstod trappstegsformade system där byggstenarna var resultat, som själva var byggda på bevis.

Vi talade i inledningen om att skriva positiva heltal som produkter av primtal. Detta kallas att faktorisera talet. De primtal som ingår kallas för primfaktorerna till talet.

Vi ska visa att detta går att göra.

Bevis.

Antag att om man börjat skriva ett positivt heltal som en produkt av heltal på något sätt. Då går det att fortsätta genom att ta en av faktorerna och dela upp den vidare som produkt. Då växer antalet faktorer. Detta kan upprepas om och om igen, men eftersom någon faktor alltid minskar i storlek tar detta slut och ingen av faktorerna går att dela upp mer.

Alla faktorerna är nu primtal.

Slut på beviset.

Den uppdelning vi fått kan skrivas så att faktorerna kommer i storleksordning.

Återigen säger vår erfarenhet något. Nämligen att uppdelningen endast kan göras på ett enda sätt. Detta är svårare att bevisa. I fortsättningen godtar vi detta som ett faktum.

Uppgift 1. (Ändå!)

– Hoppa gärna över denna uppgift, men läs igenom den först.

Uppgiften handlar om varför det endast finns en primfaktoruppdelning, när faktorerna skrivs i storleksordning.

Detta är alltså inte så lätt att visa. I stället antar vi att något som har med detta att göra redan är känt.

Antag då att vi vet att för varje produkt av positiva heltal gäller att när ett primtal delar produkten (divisionen går jämt upp) så kommer primtalet att dela åtminstone ett av talen i produkten.

Uppgiften är nu att använda detta tänkta resultat och att sedan med hjälp av detta visa att varje positivt heltal kan faktoriseras på ett enda sätt med faktorerna i storleksordning.

Slut på uppgiften.

Man kan lätt göra en lista över små primtal.

Ex. 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

En grekisk forskare, Eratosthenes, studerade bland annat primtal. Han levde på tvåhundralet före Kristus dels i Grekland, men framför allt i Alexandria, som var den stora lärdomstaden, belägen i nuvarande Egypten. Alexandria anlades på uppdrag av Alexander den store och kontrollerades av greker under många hundra år.

Han hade en metod att få fram primtalen på ett allmänt sätt. Metoden kallas efter honom för Eratostenes såll.

ERATOSTENES SÅLL

Skriv upp de positiva heltalen upp till önskad storlek,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

Markera med understrykning det första talet större än 1,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

Tag sedan det utvalda talet 2 och räkna framåt,

$2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$,

Markera dessa tal med en hatt. Alltså

1, 2, 3, $\hat{4}$, 5, $\hat{6}$, 7, $\hat{8}$, 9, $\hat{10}$, 11, $\hat{12}$, 13, $\hat{14}$, 15, $\hat{16}$, 17, $\hat{18}$,

Sedan fortsätter man med nästa tal som ej har hatt på sig och gör på samma sätt.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

Det visar sig att när talen är så små räcker det vi redan gjort och det uppstår inte några nya hattmarkeringar.

Primtalen ska nu vara dels de understrukna och dels de ej understrukna men utan hatt. Enligt idén med Eratosthenes såll ska alltså följande vara samtliga primtal mindre eller lika med 18,

2,3,5,7,11,13,17

Hur argumenterar man för det?

Bevis.

Det vi plockar bort som icke-primtal – sammansatta tal – är de med hatt på. De är produkter av två eller flera primtal.

Finns det någon produkt vi skulle ha missat? Vi har använt oss av de små primtalen 2 och 3. Talet 4 är $2 \cdot 2$ så det ger ingen extra hattmarkering.

Det första fallet med en eventuell missad produkt skulle enbart innehålla faktorer större än eller lika med 5. Lägsta värdet på en sån produkt är $5 \cdot 5 = 25$. Men 25 är större än 18. Alltså har vi inga problem med missade produkter.

Alltså listan innehåller exakt alla primtal mindre eller lika med 18.

Slut på beviset.

Detta exempel kan tjäna som förebild för hur sållet fungerar i allmänhet.

Uppgift 2. Tillverka med hjälp av Eratosthenes såll ännu fler primtal. Exempelvis de mindre än 50. Försök att avsluta räkningarna så att de inte fortsätter längre än nödvändigt för att alla primtal ska komma med.

Pröva gärna med ett tal större än 50 också.

Nu kommer en fråga som löstes av Euklides – en mycket viktig grekisk matematiker, som levde ungefär hundra år före Eratosthenes.

Hur många primtal finns det?

Det svar Euklides kom fram till var, vad man nu säger, oändligt många.

Men i den antika grekiska matematiken var man rädd för att använda ett sådant begrepp som oändligheten. Detta innebär faktiskt många logiska egendomligheter och man var helt enkelt rädd för att dessa skulle innebära att felaktigheter skulle uppstå. Alltså en klok försiktighet och inte någon dumhet som vissa kan tro när man diskuterar sådant som Zenons paradoxer.

Den mest kända av Zenons paradoxer är den som kallas ”Akilles och sköldpaddan”.

Akilles och en sköldpadda ska springa ikapp och sköldpaddan har ett försprång. Zenon säger att när Akilles kommit fram till det ställe sköldpaddan var när tävlingen

började så har sköldpaddan hunnit en mindre sträcka framåt. När Akilles kommit till sköldpaddans nya position så har den ändå den flyttat sig en bit till.

Slutsatsen blir att Akilles aldrig kommer ikapp sköldpaddan.

Detta är en paradox eftersom det ju inte kan stämma med verkligheten.

En paradox kan lite vagt beskrivas som något resonemang eller dylikt, som är riktigt eller verkar rimligt på ett visst sätt, men som samtidigt strider mot vad som förnuftet verkar säga.

I resonemanget ovan kan man med ett moderna synsätt lägga ihop ett oändligt antal av dessa steg och med hjälp av ytterligare sifferuppgifter få fram att Akilles kommer ifatt sköldpaddan.

Euklides tog upp problemet med oändligheten på ett sätt som var svårt att kritisera. Man kan säga att han byggde in oändligheten i formuleringen ”en till”. Alltså vilket antal man än ger så kan man säga att det finns (minst) en till. Vi ska se hur detta blir i sitt sammanhang.

Euklides sats. Det finns oändligt många primtal.

Bevis.

Antag att det endast finns ett visst antal primtal.

Bilda sedan produkten av dessa primtal och addera 1. Det tal som nu uppstått kan inte vara delbart med något av primtalen eftersom det alltid blir en rest 1.

Talet går att dela upp i primfaktorer som vi visat tidigare, men eftersom vi har antagit att alla primtal redan används för att bilda det, så är alla primfaktorerna nya primtal.

Detta innebär att det finns fler primtal än alla de som vi redan hade.

Detta kan inte inträffa om antalet primtal är ett vanligt tal.

Det betyder att Euklides idé om ”en till” ger upphov till ett oändlighetsbegrepp som ger svaret på frågan hur många.

Slut på beviset.

Det ”magiska” talet 30.

Några egenskaper med talet 30.

Vi tar några primtal under 30 och bildar skillnaden.

$$30 - 11 = 19$$

$$30 - 7 = 23$$

$$30 - 13 = 17$$

I de fall vi provat får vi att skillnaden mellan 30 och primtalet är ett nytt primtal.

Är detta en tillfällighet? Om inte, vad gäller då allmänt?

Uppgift 3. Gå igenom alla skillnader som bildas som 30 minus ett mindre och positivt heltal. Gör en uppställning och försök beskriva resultatet!

Vänta nu med att vända blad! Uppgifterna 3 och 4 får svar på nästa sida.

Uppgift 4. Om du har fått en tydlig beskrivning i uppgift 3, så fortsätt och ge också en förklaring.

Förklaring.

Först skriver vi 30 som en produkt av primtal. Det blir $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Vi går igenom ett exempel för att hela situationen ska bli tydlig.

Bilda $30 - 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 7 = 23$. Primtalen 2, 3 och 5 delar 30 och de delar inte 7. Det betyder att $30 - 7 = 23$ delat med 2 ger en rest eftersom 2 går jämt upp i 30, men inte i -7. Man lika gärna säga att det ger rest 1 som -1 eftersom -1 skiljer på exakt 2. Totala resten kan anges som 1.

Slutsatsen är att eftersom 2 delar den ena av termerna 30 och -7 och inte den andra så kan inte talet 23 delas av 2.

Man ge samma argument för 3 och 5. Talet 23 kan alltså inte vara delbart med 3 eller 5 heller.

Men det finns en primfaktoriserings av talet 23. Man kan undra vilka andra primfaktorer som är möjliga.

Svaret följer nu av den princip vi använde i studiet av Eratosthenes såll.

Nämligen en primfaktor måste vara större eller lika med nästa primtal i serien 2, 3, 5 dvs. 7. Antag att det finns två primfaktorer. Då måste deras produkt vara större eller lika med $7 \cdot 7 = 49$. Men detta är större än 23. Alltså finns det bara en primfaktor. Alltså är 23 ett primtal.

Det går faktiskt att vända på resonemanget och få att 30 minus ett tal som inte är ett primtal – ett sammansatt tal – också är ett sammansatt tal.

Resonemanget för detta är en övning.

Uppgift 5.

Eftersom $7 \cdot 7 = 49$ så kan vi använda talet 30 till mera.

Tag $30+1$, $30+7$, ... Fortsätt med summor mindre än 49.

Gör samma resonemang.

Uppgift 6.

Antag att vi har ett uttryck som

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 41$$

eller som

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 71.$$

Vi har alltså i båda fallen två termer som är uppbyggda av produkter av alla primtal upp till primtalet 7. Vidare har vi att termerna i första fallet subtraheras och i andra adderas men att detta inte spelar någon större roll. Viktigt är att de två termerna inte har några gemensamma faktorer. Detta innebär att vårt tidigare resonemang fortfarande fungerar.

Det första primtalet efter 7 är 11. Vi kan alltså arbeta med tal mindre än $11 \cdot 11 = 121$. Alltså är både 41 och 71 primtal.

Uppgift 7.

Börja med talet 1 och fortsätt sedan att stegvis arbeta fram större och större primtal så att du får en lista av primtal upp till något visst tal.

Hur långt går det att komma?

Finns det en möjlighet att passera denna gräns genom att inte ha en komplett serie primtal utan i stället tillåta att det blir hopp i följd.

Uppgift 8.

Vi vet några enkla saker som beror på vårt att skriva tal med siffror. Vi påstår alltså en antal fakta som du kanske redan vet. Annars får du tänka igenom dem.

Ett tal är delbart med 2 om slutsiffran är 0,2,4,6 eller 8. Detta är nödvändigt.

Ett tal är delbart med 5 om slutsiffran är 0 eller 5. Detta är nödvändigt.

Ett tal är delbart med 3 om man lägger i ihop dess siffror – siffersumman – och denna är delbart med 3. Detta är nödvändigt.

Nu kommer själva uppgiften. Antag att vi arbetar med två termer som tidigare. Antag att vi använder primtalen upp till ett visst tal. Men med en skillnad ett av av primtalen 2,3 eller 5 är inte med.

Antag att resultatet är av rätt storlek på samma sätt som förut.

Vad händer? Jo vi har två möjligheter. Antingen är resultatet ett primtal eller så är det utelämnade primtalet en faktor i talet och detta alltså inte ett primtal. Enligt uppställningen ovan är det lätt att se vad som gäller.

Man kan också utelämna flera av primtalen 2,3 och 5.

Avslutningsvis, försök använda metoden för att skapa något /några primtal som är större än de tidigare, om det går.

Uppgift 9.

Hur ska man göra om man vill använda tre termer i stället för två när man vill skapa primtal? Är detta bättre? Visa också att din idé fungerar.

Nu har vi listor över små primtal. Det går att undersöka några kända gissningar om primtalen.

– En god gissning kallas ofta för hypotes.

Primtalstvillingar.

Primtalstvillingar är två udda primtal – det finns ju bara ett jämnt – som har skillnad lika med 2. Det är inte känt om det finns ändligt eller oändligt många primtalstvillingar!

Hypotes: Det finns oändligt många primtalstvillingar.

Uppgift 10. Ja, vi kan inte testa detta förstås med våra listor, men man kan se om primtalstvillingarna finns med högre upp i listan och hur de de tunnas ut allteftersom.

Vad tycker du?

Uppgift 11. Visa att alla primtalstvillingar större än 4 och mindre än 25 fås som

$$1 \cdot 6 - 1, \quad 1 \cdot 6 + 1$$

$$2 \cdot 6 - 1, \quad 2 \cdot 6 + 1$$

$$3 \cdot 6 - 1, \quad 3 \cdot 6 + 1$$

Det går att hitta större primtalstvillingar på ett liknande sätt.

Tag ett positivt heltal och multiplicera det med 6. Se till att produkten är mindre än $7 \cdot 7 - 1 = 48$. Testa slutsiffran – den ska inte vara 1,4,6 eller 9. Då utgör produkten-1, produkten+1 en primtalstvilling.

Visa det.

Goldbachs hypotes:

Varje jämnt tal, större än 4, är en summa av två udda primtal.

Goldbach levde på 1800-talet. Han studerade tabeller över primtal och gjorde denna hypotes.

Det är ännu inte känt om hypotesen är sann eller inte.

Uppgift 12.

Testa Goldbach hypotes med hjälp av din primtalslista.

Vad tycker du?

Man kan illustrera hypoteserna genom att ta ett rutat papper och skriva in talen 1 till 30 i en rad med ett tal i varje ruta. Sedan markerar man på något sätt varje tal som inte är delbart med 2,3, eller 5. Remsan fäster man sedan ihop till en ring, ruta vid ruta.

Man ser att markeringarna är symmetriska framåt och bakåt från 30.

Gör sedan en likadan ring till.

Lägg ringarna parallellt och förskjut dem två rutor i förhållande till varann.

De markeringar som kommer parallellt och med talen på samma sida om 30 utgör primtalstvillingarna där 3 och 5 inte ingår.

Hur ska man illustrera Goldbachs hypotes?

Säg att vi vill undersöka hur 18 kan skrivas som summa av två primtal.

Förskjut remsorna så att 30 kommer över 18.

Vi får följande tal på samma lägen. Se uppställningen på nästa sida.

Tabell

18, 30 jfr 18, 0
 17, 29 jfr 17, 1
 16, 28 jfr 16, 2
 15, 27 jfr 15, 3
 14, 26 jfr 14, 4
 13, 25 jfr 13, 5
 12, 24 jfr 12, 6
 11, 23 jfr 11, 7
 10, 22 jfr 10, 8
 9, 21 jfr 9, 9
 8, 20 jfr 8, 10
 7, 19 jfr 7, 11
 6, 18 jfr 6, 12
 5, 17 jfr 5, 13
 4, 16 jfr 4, 14
 3, 15 jfr 3, 15
 2, 14 jfr 2, 16
 1, 13 jfr 1, 17

Till vänster står de par som uppstår. Till höger står i stället det andra talet ersatt med det symmetriska talet, dvs 30 minus det andra talet till vänster. Vi vet! att dessa två par är lika markerade för detta kom fram genom Uppgifter 3 och 4.

Paret till höger ger summa 18. Det betyder att vi till höger kan avläsa att summan blir 18 och från vänster och få med om de är primtal eller inte. Här ingår dock ej 3 eller 5 i paret och 1 kan användas som "primtal".

Exempel: 7, 19 till vänster. Tidigare har vi fått fram att dessa är primtal. Men då är $30 - 19 = 11$ ett primtal enligt våra tidigare bevis. Vidare är får vi ur metoden att $7 + 11 = 18$. Alltså 7, 11 är ett par av primtal med summa 18.

Tabellen är fortfarande symmetrisk. Om man tar hänsyn till detta och till att 1, 3 och 5 behandlas på ett annat sätt än vanligt så får man fram en beskrivning av antalet sätt som 18 kan skriva som summa av två primtal.

Om man tar $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ t.ex. som "magiskt tal" i stället så fungerar allt som förut, men primfaktorer som är lika med 17 eller större kan smyga sig in på olika sätt.

Vi byter frågeställning.

Några olika följder av heltal:

2,7,12,17,22,27,32, ...

3,7,11,15,19,23,27, ...

9,21,33,45,57,69, ...

Vad är det som kännetecknar dem? Jo, så långt de är skrivna så är det samma skillnad mellan två följande tal i var följd. En sådan följd kallas för en aritmetisk följd. De aritmetiska följderna som påbörjats här består av positiva heltal.

Hur många primtal finns det i en aritmetisk följd av positiva heltal?

Det finns ett fall som är självklart. Antag att ett av talen och den skillnad som finns har en gemensam faktor. Då kommer varje tal i följden ha denna faktor. Det betyder att det högst kan finnas inget eller ett primtal i följden.

Ex. 21,24,27,30,33,...

Det är alltså de övriga fallen som intresserar oss!

Tag de två följderna som är av denna typ och som har en skillnad mellan följande tal som är 4. De kan alltså börja på 1 eller 3 exempelvis.

Eftersom alla primtal utom 2 hör till endera följden så vet vi att åtminstone en av följderna innehåller oändligt många primtal. Enligt Euklides sats finns det ju oändlig många primtal.

Idén till att kunna bevisa något på ett enkelt sätt tar vi från Eulides bevis av sin sats.

Sats. Den aritmetiska följden som börjar med 3 och ökar med steg 4 innehåller oändligt många primtal.

Bevis.

Om man delar ett av talen i följden med 4 blir det alltså rest 3. Man kan lika gärna säga att det blir rest -1. Detta beror på att 4 har rest 0 och om man drar ifrån 4 från 3 får man just -1.

Nu finns det tre möjligheter. Visa dessa.

Multiplikation av två tal med rest +1 ger ett resultat med rest +1.

Multiplikation av två tal med rest -1 ger ett resultat med rest +1.

Multiplikation av ett tal med rest +1 och ett med rest -1 ger ett resultat med rest -1.

Vi antar att antalet primtal som ger rest -1 vid division med 4 är lika många som något positivt heltal. (Ändligt många.)

Bilda produkten av vart ett av dessa med sig själv.

Nu har resultaten rest $+1$.

Om vi bildar en produkt av dessa så har resultatet rest $+1$.

Lägg till 2. Resultatet har rest 3, dvs rest -1 .

Detta tal har en uppdelning i primfaktorer. Minst ett av dessa har rest -1 enligt ovanstående.

Men detta primtal kan inte ingå bland de ursprungliga. Kolla det.

Vi har alltså fått att det finns minst ett primtal till i den ursprungliga följen.

En ny - en till.

Jämför Euklides bevis.

Slut på beviset.

Uppgift 13. Försök att hitta någon/några aritmetiska följd/följder där det går att göra något liknande resonemang. Gör en tabell över dina resultat.

SLUT