INST. FÖR MATEMATIK, KTH – ROY SKJELNES

TENTAMEN I 5B1307, 16 AUGUSTI 2004, KL 08.00–13.00

Denna tentamen kommer i två delar. Del **A** utgjörs av uppgifterna 1 och 2, medan del **B** utgjörs av uppgifterna 3 och 4. Del **A** ger, inklusive bonuspoäng, maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna är som följer. För godkänt krävs minst 16 poäng (inkl. bonus). För betyget 4 krävs 30 poäng. För betyget 5 krävs minst 40 poäng.

Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning. Inga hjälpmedel är tillåtna. LYKKE TIL!

——————————— **DEL A.** ———————————

1. Vi låter α vara standardbas för $\mathbf{R}^2$ och α' standardbas för $\mathbf{R}^3$, och vi fixerar följande tre vektorer $u = (1,0,1), v = (1,1,-1)$ och $w = (1,-1,1)$ i $\mathbf{R}^3$. Slutligen definierar vi $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ som $T(a,b) = au - bv$.

a). Bestäm matrisrepresentationen $\mathrm{Mat}(T, \alpha, \alpha')$. (5 p)

b). Visa att vektorerna u, v och w bildar en bas β för $\mathbf{R}^3$. (5 p)

c). Bestäm matrisrepresentationen $\mathrm{Mat}(T, \alpha, \beta)$. (5 p)

d). Visa att T ger en bijektion mellan $\mathbf{R}^2$ och Im (T). (5 p)

2. Låt $U = \mathrm{Span}(X, Y, Z)$ vara vektorrumet som spänns upp av dom tre vektorerna

$$X = (1,2,3,1) \quad Y = (4,3,1,2) \quad \text{och} \quad Z = (9,8,5,5).$$

i det Euklidiska 4-rummet $\mathbf{R}^4$.

a). Bestäm en ON-bas för U. (6 p)

b). Bestäm $\mathrm{proj}_U(1,2,3,0)$. (4 p)

——————————— **DEL B.** ———————————

3. Låt M_n vara vektorrummet av reella $n \times n$-matriser. En matris $A \in M_n$ är symmetrisk om $A = A^{tr}$, och skev-symmetrisk om $A = -A^{tr}$. Låt $V \subseteq M_n$ vara delrummet av symmetriska matriser, och $W \subseteq M_n$ delrummet av skev-symmetriska matriser. Vi låter $T : M_n \to M_n$ vara den linjära avbildningen definierad som

$$T(X) = X + X^{tr}.$$

a). Bestäm dimensionen till V. (4 p)

b). Bestäm dimensionen till ker T. (6 p)

c). Visa att $M_n = V \oplus W$. (6 p)

d). Bestäm egenvärderna till T. (8 p)

4. Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning på et reelt inreproduktrum, och låt A vara matrisrepresentationen av T med avseende på en fixerad ortonormal bas β. Visa att $< Tu, Tv >=< u, v >$ för alla vektorer u och v i V är ekvivalent med att $A^{-1} = A^{tr}$. (10 p).

Fasittforslag

1a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1b. Determinanten til matrisen man får ved å sette opp de tre vektorene u, v og w som søyler blir $-2 \neq 0$.

1c.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1d. Det er klart av matriserepresentasjonen over at T er injektiv, og dermed blir $\mathbf{R}^2$ isomorf med bildet av T.

2a. Vi har at $Z = X + 2Y$ slik at $U = \text{Span}(X, Y)$. Vi appliserer Gram-Schmidt algoritmen på disse to lineært uavhengige vektorer og finner at

$$Y' = Y - \frac{X \cdot Y}{||X||^2} X = (3, 1, -2, 1).$$

Dermed har vi to ortogonale vektorer X og Y', som etter normalisering blir en ON-basis for U. Vi får at vektorene

$$E = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3, 1) \quad \text{og} \quad F = \frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, -2, 1)$$

danner en ON-bas for U.

2b. For å beregne projeksjonen bruker vi ON-basen fra forrige oppgave. Vi har at

$$\text{proj}_U w = < E, w > E + < F, w > F,$$

og ønsker å beregne dette med $w = (1, 2, 3, 0)$. Vi får at $\sqrt{15} < E, w >= 14$ og at $\sqrt{15} < F, w >= -1$. Dette gir

$$\text{proj}_U w = \frac{1}{15}(14(1, 2, 3, 1) - (3, 1, -2, 1)) = \frac{1}{15}(11, 27, 44, 13).$$

3a. For hvert par av tall $1 \leq i \leq j \leq n$ lar vi $D_{i,j}$ være den symmetriske matrisen med null over alt untatt koeffsient (i, j) og (j, i) som vi lar være 1. Disse matrisene spenner opp vektorrommet V av symmetriske matriser, og er lineært uavhengige. Deres antall er $n + (n-1) + \cdots 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

3b. Vi merker oss at $T(X) = X + X^{tr}$ er symmetrisk for alle matriser X slik at Im $(T) \subseteq V$. Avbildningen er også surjektiv da vi for gitt symmetrisk matrise A har at $T(\frac{1}{2}A) = A$. Det følger da av dimensjonssatsen at

$$\dim(\ker(T)) = \dim M_n - \dim V = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

3c. Det er klart at $V \cap W = 0$ siden null-matrisen er den eneste matrisen som både er symmetrisk og skjevsymmetrisk. Det som gjenstår er å skrive en vilkårlig matrise X som en sum av en symmetrisk og skjevsymmetrisk, dvs at $M_n = V + W$. Vi har at

$$X = \frac{1}{2}(X + X^{tr}) + \frac{1}{2}(X - X^{tr}).$$

Med andre ord at X er en sum av en symmetrisk og en skjevsymmetrisk matrise.

3d. Vi har at $M_n = V \oplus W$ og at W ligger i kjernen til W. Dvs. at alle skjevsymmetriske matriser har egenverdi 0. En symmetrisk matrise A sendes til $2A$ slik at alle symmetriske matriser har egenverdi 2.

4. Operatoren $T : V \to V$ representeres med matrisen A i en ortonormert basis $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Anta att $< Tu, Tv >=< u, v >$ for alle vektorere u og v. Vi har da matrise ligningen

$$[u]^{tr} A^{tr} A[v] = [u]^{tr}[v],$$

hvor vi med $[u]$ mener koordinatmatrisen til vektoren u med hensyn på den fikserte ortnormale basis β. La vidre $B = A^{tr}A$. Det er lett å se at $[e_i]^{tr} B[e_j] = b_{i,j}$ hvor $b_{i,j}$ er koeffisient (i, j) til matrisen B. Siden β er en orthonormal basis får vi av den uthevede ligningen over at $b_{i,j} = 0$ om $i \neq j$ og $b_{i,j} = 1$. Dvs, at B er identitetsmatrisen, eller ekvivalent at $A^{tr} = A^{-1}$.

Anta nå at $A^{tr} = A^{-1}$. Vi får da at

$$< Tu, Tv >= [u]^{tr} A^{tr} A[v] = [u]^{tr}[v] =< u, v > .$$