INST. FÖR MATEMATIK, KTH – ROY SKJELNES

Typeset by AMS-TeX

Tentamen i 5B1307, 9 Januari 2004, kl 08.00–13.00

Denna tentamen kommer i två delar. Del **A** utgjörs av uppgifterna 1-3, medan del **B** utgjörs av uppgifterna 4 och 5. Del **A** ger, inklusive bonuspoäng, maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna är som följer. För godkänt krävs minst 16 poäng (inkl. bonus). För betyget 4 krävs 30 poäng. För betyget 5 krävs minst 40 poäng.

Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning. Inga hjälpmedel är tillåtna. LYKKE TIL!

DEL A.

1. Låt $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildningen

$$T(x, y, z, w) = (2x + y - w, 0).$$

a). Hitta en matrisrepresentation för T med avseende på någon bas. (4 p)

b). Bestäm dimensionen för $\mathrm{Null}(T)$. (4 p)

c). Bestäm det ortogonala komplementet till $\mathrm{Null}(T)$. (6 p)

2. Låt $U = \mathrm{Span}(X, Y, Z)$ vara vektorrumet som spänns upp av dom tre vektorerna

$$X = (1, 2, 3, 1) \quad Y = (4, 3, 1, 2) \quad \text{och} \quad Z = (9, 8, 5, 5).$$

i det Euklidiska 4-rummet $\mathbf{R}^4$.

a). Bestäm en ON-bas för U. (6 p)

b). Bestäm $\mathrm{proj}_U(1, 2, 3, 0)$. (4 p)

3. Låt $\beta = \{e_1, e_2\}$ och $\gamma = \{f_1, f_2\}$ vara två baser för ett vektorrum V. Vi har att $e_1 + e_2 = f_1$ och $e_1 = -f_2$. Bestäm basbytes matrisen från β til γ. (6 p)

DEL B.

4. Vi identifierar $\mathbf{R}^2$ med dom komplexa talen. För ett givet komplext tal z har vi den reella linjära avbildningen $T_z : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som skickar ett komplext tal w till $T_z(w) = z \cdot w$; den vanliga komplexa multiplikationen.

a). Låt $z = a + ib$ vara givet. Bestäm en matrisrepresentation för T_z. (6 p)

b). Visa att $T_{z_1} T_{z_2} = T_{z_1 z_2}$ för alla komplexa tal z_1 och z_2. (4 p)

c). Låt $z = \xi$ vara en tredjerot till 1. Visa att $T_\xi^2 = T_\xi^{-1}$. (6 p)

d). Vilka komplexa tal z med $|z| = 1$ är sådan att T_z har egenvektorer. (8 p)

5. Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett vektorrum V. Antaga att $T^2 = T$. Visa att $V = \mathrm{Im}(T) + \mathrm{Null}(T)$ och att $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Null}(T) = \{0\}$. (10 p).

Fasittforslag

1a.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1b. Det er klart at dimensjonen til bildet av T er 1, slik at $\dim(\mathrm{Null}(T)) = 3$.

1c. Vektorene $(1, -2, 0, 0), (0, 1, 0, 1)$ og $(0, 0, 1, 0)$ er linjært uavhengige og ligger i kjernent til T, og er følgelig en basis. En vektor $X = (a, b, c, d)$ i det ortogonale komplementet vil da måtte satisfiere følgende ligninger

$$a - 2b = 0 \quad b + d = 0 \quad \text{og} \quad c = 0.$$

Dette gir at $\mathrm{Null}(T) = \{(2t, t, 0, -t) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

2a. Vi har at $Z = X + 2Y$ slik at $U = \mathrm{Span}(X, Y)$. Vi appliserer Gram-Schmidt algoritmen på disse to lineært uavhengige vektorer og finner at

$$Y' = Y - \frac{X \cdot Y}{||X||^2} X = (3, 1, -2, 1).$$

Dermed har vi to ortogonale vektorer X og Y', som etter normalisering blir en ON-basis for U. Vi får at vektorene

$$E = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3, 1) \quad \text{og} \quad F = \frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, -2, 1)$$

danner en ON-bas for U.

2b. For å beregne projeksjonen bruker vi ON-basen fra forrige oppgave. Vi har at

$$\mathrm{proj}_U w =< E, w > E+ < F, w > F,$$

og ønsker å beregne dette med $w = (1, 2, 3, 0)$. Vi får at $\sqrt{15} < E, w >= 14$ og at $\sqrt{15} < F, w >= -1$. Dette gir

$$\mathrm{proj}_U w = \frac{1}{15}(14(1, 2, 3, 1) - (3, 1, -2, 1)) = \frac{1}{15}(11, 27, 44, 13).$$

3. Vi uttrykker vektorene i basen β som lineær kombinasjoner av basvektorene i γ. Dette gir $e_1 = -1 \cdot f_2$ og at $e_2 = f_1 - e_1 = 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$. Overgangsmatrisen blir da

$$P = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4a. Vi bruker standardbasis for $\mathbf{R}^2$ som vi betegner med 1 og i. Multiplikasjon med $z = a + bi$ blir dermed representert med matrisen

$$M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

4b. Direkte innsetting.

4c. Vi har, fra oppgaven over, at $T_\xi^3 = T_{\xi^3} = T_1$. Multiplikasjon med tallet 1 blir selvsagt identitetsoperatoren. Dermed har vi at $T_\xi^3 = \mathrm{Id}$, eller ekvivalent at T_ξ^2 er inversen til T_ξ.

4d. Et komplekst tall z på enhetssirkelen kan vi skrive på formen $e^{i\theta}$, der θ er noen vinkel som vi måler moturs fra $(1,0)$. Multiplikasjon med et slikt komplekst tall medførere en rotasjon med vinkelen θ. Under rotasjon med en vinkel θ vil ingen linjer gjennom origo forbli invariante, såfrem θ ikke er et heltallsmultippel av π. Det følger da at de eneste komplekse tall på enhetssirkelen med tilhørende egenvektorer er $z = 1$ og $z = -1$.

5. La x være en vektor, og betrakt $y = x - T(x)$. Siden $T^2 = T$ vil $T(y) = 0$ og y er således med i kjernen til T. Da vi har $x = y + T(x)$ for en vilkårlig vektor x følger det at $V = \mathrm{Null}(T) + \mathrm{Im}(T)$. La nå x være en vektor med i både $\mathrm{Null}(T)$ og i $\mathrm{Im}(T)$. Siden $T(x) = 0$ og siden det finnes y i V slik at $T(y) = x$ får vi følgende ligninger

$$0 = T(x) = T(T(x)) = T(y) = x.$$

Med andre ord at $\mathrm{Null}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.