Institutionen för matematik, KTH
R. Skjelnes

Tentamensskrivning, 2003-01-07, kl 14.00–19.00.
5B1307, Linjär Algebra g.k.

Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 14 respektive 24 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna. Lykke til!

---

1. Låt V vara det reella vektorrummet av polynom i en variabel x, av grad mindre eller lika med 2. Låt $T : V \to V$ vara den linjära avbildningen som bestäms av

$$T(1) = 2, \quad T(x) = 6, \quad \text{och} \quad T(x^2) = 4 - x + x^2.$$

   a) Bestäm en matrisrepresentation för T med avseende på någon bas. (4p)
   b) Bestäm egenvärdena till T. (4p)
   c) Hitta en bas för V sådan att matrisrepresentationen för T är en diagonal matris. (4p)

2. Vi definierar $T \in \mathcal{L}(F^3)$, där inreproduktstrukten på F^3 ges av den euklidiska inreprodukten, vid

$$T(x, y, z) = (z, 2x, 3y).$$

   Hitta en isometri S sådan att $T = S\sqrt{T^*T}$. (6p)

3. Låt V vara ett ändligt dimensionelt inreproduktrum över F.
   a) Vilka operatorer T har en ON-bas av egenvektorer? (4p)
   b) Låt T^* vara den adjungerade till en given operator $T \in \mathcal{L}(V)$. Visa att (6p)

$$\text{Null}(T^*) = \text{orthogonal komplementet till Range}(T).$$

4. Låt V_m vara vektorrummet av kvadratiska $(m \times m)$-matriser (här är $m > 0$ ett fixerat heltal) med koefficienter i F. Spåret till en matris $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ definieras som summan av diagonal elementen och betäcknas med

$$\text{Tr}(M) = a_{1,1} + \cdots + a_{m,m}.$$

   Bestäm dimensionen till delrummet $D \subseteq V_m$ där (8p)

$$D = \{M \in V_m \mid \text{Tr}(M) = 0\}.$$

Lösningsförslag till tentamen i 5B1307, Linjär Algebra g.k, 2003-01-07.

1. a) Vi använder basen $\beta = (1, x, x^2)$. Matrisrepresentationen M_T för T blir då

$$M_T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Matrisen M_T är övre triangular sådan att egenvärderna til T återfinns som på diagonalen till M_T.
Svar: Egenvärderna är 0,1 och 2.
c) Vi skall hitta en bas av egenvektorer för V. Vi har egenvärderna från uppgift b) och använder dessa för att lösa ekvationen $M_T X = \lambda X$, där λ är egenvärderna.

$$M_T X = 2X \Rightarrow X = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_T X = 0 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_T X = X \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{bmatrix},$$

för villkårlig skalär t. Vi sätter $t = 1$ och får koordinatmatriserna till 3 linjärt oberoende egenvektorer, och matrisrepresentasjonen av T med avseende på denna bas är diagonal. Vi har $(1, 0, 0) = 1$, $(3, -1, 0) = 3 - x$ och $(2, -1, 1) = 2 - x - x^2$. **Svar:** Avbildningen T diagonaliserar över basen $\beta' = (1, 3 - x, 2 - x + x^2)$.

---

2. Standardbasen för F^3 med avseende på det euklidiska inreproduktet är en ON-bas. Dette ger att matrisrepresentationen för T^* ges som den transponerade till

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

där M_T är matrisrepresentationen till T. Vi har då att matrisrepresentasjonen till T^*T ges av produkten $M_T^{tr} M_T$. Denna produkten beräknar vi och får en diagonalmatris med diagonalelementer $4, 9$ och 1. Matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representerar en operator som är självadjungerad och har positiva egenvärden, och uppenbarligen har vi att $M^2 = M_T^{tr} M_T$. Vi har då att matrisen M representerar den positiva roten $\sqrt{T^*T}$. Matrisen N som representerar isometrien vi söker har blir då

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det er klart at N är en isometri, och vi har at $NM = M_T$.

---

3. a) Spektralsatserna ger oss att dom självadjungerade reella operatorerna och dom normala complexa operatorerna har en ON-bas av egenvektorer.
b) Låt $x \in \text{Null}(T^*)$, dvs $T^*(x) = 0$. Då har vi

$$0 =< y, 0 >=< y, T^*x >=< Ty, x >,$$

för alla $y \in V$, m.a.o. är x med i det orthogonala komplementet W till Range(T). Vi har då visat inklusionen Null(T) $\subseteq W$. Vi skall nu visa inklusionen åt det andra hållet. Låt $x \in W$, dvs $0 =< Ty, x >$ för alla $y \in V$. Detta ger

$$0 =< Ty, x >=< y, T^*x >$$

för alla $y \in V$ och speciellt för $y = T^*x$. Derav har vi

$$0 =< T^*x, T^*x >\Rightarrow T^*x = 0.$$

Vi har då att $x \in \text{Null}(T^*)$. Dom två inklusionerna Null(T) $\subseteq W$ och $W \subseteq$ Null(T^*) ger likhet.

---

4. Avbildningen $\text{Tr} : V_m \to F$ är linjär och surjektiv, och nollrummet $\text{Ker}(Tr) = D$. Det följer då från dimesionssatsen att

$$\dim(\text{Ker (Tr)}) = \dim V_m - 1 = m^2 - 1.$$

Svar: Dimensionen till D är $m^2 - 1$.
