Existens och entydighet för ordinära differentialekvationer

Michael Björklund,
f00-mib@f.kth.se

Grundläggande begrepp

Definition 1 *Ett begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer har följande struktur: givet en funktion* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *, existerar en kurva (en differentierbar funktion)* $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ *sådan att*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x_0 \quad ?$$

*Anm. Begynnelsevärdesproblem förkortas **IVP** från engelskan:*
***I**nitial **V**alue **P**roblem.*

Exempel 1 *En partikel med massan* 1 *rör sig längs ett spår, påverkas av en kraft som ges av* $F(y(t)) = -k\, y(t)$*. Antag att partikeln startar från vila i punkten* $y = 2$*.*

Enligt Newtons andra lag kommer partikelns acceleration $\ddot{y}(t)$ *att ges av*

$$\ddot{y}(t) = -k\, y(t) \qquad y(0) = 2 \quad \dot{y}(0) = 0$$

Genom att införa tillstånden $x_1(t) = y(t)$ *och* $x_2(t) = \dot{y}(t)$ *kan ovanstående problem skrivas som*

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -k\, x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vilket är precis standardformen för ett IVP som det formulerades ovan, där

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad f(x(t), t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -k\, x_2(t) \end{bmatrix}$$

I vårt fall gäller att $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

I detta papper skall vi noggrant undersöka vilka krav vi måste ställa på funktionen $f(x(t), t)$ för att en lösning , och helst en unik sådan, skall existera till ett givet IVP. De resultat och metoder som vi kommer att utveckla kommer att vara väldigt användbara i senare kurser i numerisk analys.

Innan vi börjar med denna kravutredning, måste vi först utvidga vår syn på $\mathbb{R}^n$, som är det rum som främst intresserar oss när vi handskas med IVP. Framställningen som följer är något mer allmän än vad våra behov kräver, men de ingående satserna är så pass starka och generella att de förtjänar sin egen plats i denna avhandling.

Definition 2 *En metrik på en mängd M är en funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ som uppfyller*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in M \end{aligned}$$

Anm. Man kan intuitivt tänka på en metrik som ett avstånd mellan två element (punkter) i M . Ett rum med en definerad metrik kallas ett metriskt rum.

Exempel 2 *Betrakta nu $M = \mathbb{R}^n$ och definera $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^T\,(x-y)}$, där ^{T} står för vektortransponat.*

Det inses lätt att $d(x,y)$ endast antar positiva reella tal, samt att

$$\sqrt{(x-y)^T\,(x-y)} = \sqrt{(y-x)^T\,(y-x)}$$

och

$$d(x,y) = 0, \Leftrightarrow\ x - y = 0$$

Det tredje och sista kravet på en metrik är ingenting annat än triangelolikheten, som vi vet gäller i $\mathbb{R}^n$.
För de som fortfarande tvivlar, rekommenderas att tänka på saken i $\mathbb{R}$, där metriken ovan övergår i $d(x,y) = |x-y|$.
Således är $\mathbb{R}^n$ ett metriskt rum.

Anm. Vår metrik är inte den enda möjliga metriken.

Definition 3 *En norm är en funktion $\|\ \|: \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$ med följande egenskaper:*

$$\begin{aligned} \|\, ax \,\| &= |a|\,\|\, x \,\| \qquad a \text{ är en skalär} \\ \|\, x + y \,\| &\leq \|\, x \,\| + \|\, y \,\| \quad \forall\ x, y\, \in \mathbb{X} \end{aligned}$$

Anm. En norm ger upphov till en metrik om man definerar $d(x,y) = \|\, x - y \,\|$. (Övning!). Visa detta!

Anm. Ett rum med en definerad norm, kallas ett normerat rum. Eftersom en norm alltid kan definera en metrik, är normerade rum också metriska.

Vi måste också utvidga vår syn på konvergensbegreppet.

Definition 4 *En följd* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *kallas en Cauchyföljd (eller bara Cauchy) om det gäller att* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N$ *sådant att* $\forall n, m > N$ *medför att* $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ *, där* d *är en metrik.*

Definition 5 *En funktion* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *kallas en strikt kontraktion på* $\mathbb{X}$ *om* $\exists\, c < 1$ *så att* $d(f(x), f(y)) \le c\, d(x, y) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{X}$.

Exempel 3 *Studera rekursionsföljden*

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\, x_k, \qquad x_k \in \mathbb{R} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Vi skall visa två saker om denna följd:

1. *Funktionen* $f(x) = \frac{1}{3}\, x$ *är en strikt kontraktion med metriken* $d(x, y) = |x - y|$.
2. *Följden är Cauchy.*

Lösning:

1. *Det torde ganska lätt inses att*

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y| = \frac{1}{3}|x - y| \le \frac{1}{2}|x - y|,$$

där $c = \frac{1}{2} < 1$*, varför* f *är en strikt kontraktion.*

Anm. Valet av c *är helt godtyckligt så länge som* $\frac{1}{3} < c < 1$.

2. *Eftersom* f *är en strikt kontraktion med* $c = \frac{1}{2}$ *måste följande gälla (tänk !) :*

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \le c\, d(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \le c\, d(x_2, x_1) \le c^2\, d(x_1, x_0) \\ &\;\;\vdots \\ d(x_{n+1}, x_n) &\le c^n\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

För att undersöka huruvida följden är Cauchy behöver vi studera $d(x_{n+m}, x_n)$*:*

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\le d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\le (c^{n+m-1} + c^{n+m-2} + \ldots + c^n)\, d(x_1, x_0) \\ &\quad \textit{geometrisk serie i } c \Rightarrow \\ &= c^n(1 + c + \ldots + c^{m-1})\, d(x_1, x_0) \le \frac{c^n}{1 - c}\, d(x_1, x_0) = (\frac{1}{2})^{n-1}\, d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

vilket kan göras mindre än varje valt $\varepsilon > 0$, om

$$n > \ln 2 - \ln \frac{\varepsilon}{d(x_1, x_0)}$$

(övning !).

anm. $0 < d(x_1, x_0) < \infty$ *gäller* $\forall\, x_0 \neq 0$. *Följden är således Cauchy.*

Definition 6 *Ett rum X i vilket varje cauchyföljd konvergerar, d.v.s. om $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ är cauchy så existerar ett $x \in X$ sådant att $d(x, x_n) \to 0$, $n \to \infty$, sägs vara ett komplett (eller fullständigt) rum.*

Exempel 4 *Rummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$ är kompletta (Övning !)*

Definition 7 *En funktion $f : X \to Y$ sägs uppfylla Lipschitz villkor, om $\exists\, A > 0\ \forall\, x, y \in X$ gäller att $d(f(x), f(y)) \leq A\, d(x, y)$.*

Exempel 5 *Följande borde vara känt:*
En funktion är kontinuerlig om det gäller att $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ så att $d(x, y) < \delta \ \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Antag nu att f uppfyller Lipschitz villkor, och anamma notationen ovan, då gäller :

$$d(f(x), f(y)) \leq A\, d(x, y) < \varepsilon$$

om δ sätts till $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{A}$, vilket alltid kan göras. Således är alla Lipschitz-funktioner kontinuerliga.

Anm. Detta är mycket viktigt att ha klart för sig inför den kommande framställningen.

Exempel 6 *Lipschitz villkor är dock inte ekvivalent med kontinuitet, utan är något starkare, och bör nog hellre tolkas som att differenskvoten*

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq A,$$

d.v.s. håller sig begränsad för alla distinkta val av element x, y i X.
*Det betyder dock **inte** att funktionen är deriverbar, vilket inses om man studerar Lipshitzfunktionen $f(x) = |x|$ i $\mathbb{R}$.*

Vi är nu redo för vår första sats, som vi kommer att använda vid ett avgörande tillfälle framöver.
Övning! Visa att deriverbara funktioner är Lipschitz!

Sats 1 (Banachs fixpunktsats) *Låt $\mathbb{X}$ vara ett komplett metriskt rum och f en strikt kontraktiv avbildning. Då har f en unik fixpunkt, d.v.s. det existerar ett $\tilde{x} \in \mathbb{X}$ sådant att $\tilde{x} = f(\tilde{x})$.*

Bevis.

Unicitet:
Antag att p och q är två distinkta fixpunkter till f.
Inses: $d(f(p), f(q)) = d(p, q) \leq c\, d(p, q)$, men $c < 1$ varför vi får en motsägelse. Fixpunkten måste alltså vara unik.

Existens:
Välj godtyckligt $x_0 \in X$ och definera rekursionsrelationen

$$x_{n+1} = f(x_n),\ \ n \in \mathbb{N}$$

Vi vill nu visa att $x_n \to$ då x, $n \to \infty$, d.v.s. att följden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot ett element $x \in \mathbb{X}$, men eftersom $\mathbb{X}$ enligt antagande är ett komplett rum, räcker det att visa att $\{x_k\}_{n=1}^{\infty}$ är cauchy. Vi använder samma metod som utvecklades i exempel 3:

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \leq c\, d(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \leq c\, d(x_2, x_1) \leq c^2\, d(x_1, x_0) \\ &\vdots \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq c^n\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Studera nu $d(x_{n+m}, x_n)$:

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (c^{n+m-1} + c^{n+m-2} + \ldots + c^n)\, d(x_1, x_0) \\ &\quad \textit{geometrisk serie} \Rightarrow \\ &= c^n (1 + c + \ldots + c^{m-1})\, d(x_1, x_0) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Givet $c < 1$ och n stort kan således $d(x_{n+m}, x_n)$ göras godtyckligt liten, och därmed är $\{x_k\}_{n=1}^{\infty}$ cauchy.

En bra övning: Visa att uttrycket $d(x_{n+m}, x_n)$ kan göras mindre än varje val av $\varepsilon > 0$ om bara

$$n > -\frac{1}{\ln c}\, \ln \frac{\varepsilon\,(1-c)}{d(x_0, x_1)}$$

Anm. Satsen gäller speciellt i $\mathbb{R}^n$, då detta är ett komplett metriskt rum.

Standardproblem för differentialekvationer

Problemställning

Det är nog värt att påminna oss om vad vi egentligen strävar efter. Vi vill ställa krav på funktionen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ i ett allmänt IVP på formen

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad x(0) = x_0$$

så att vi kan garantera en (unik) lösning till problemet.

Notation

Vi måste införa en hel del notation, men som förhoppningsvis senare kommer att framstå som nödvändig för läsaren. För det första studerar vi endast tider t i intervallet $\mathbb{I} = [-1, 1]$. Valet av detta intervall är godtyckligt, då alla sammanhängande tidsintervall alltid kan skalas om så att de ligger i $\mathbb{I}$ *(tänk!)*. Vårt val kommer dock att ge snyggare kalkyler.

Bilda sedan mängden $\mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ av alla kontinuerliga funktioner $x(t) : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$. Notationen med $x(t)$ har valts så att släktskapet mellan detta rum och det förmodade lösningsrummet till standard-IVP klart skall framgå.

Låt oss nu definera en norm på $\mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ enligt

$$\| \, x(t) \, \| = \max_{t \in \mathbb{I}} |x(t)|$$

Anm. Eftersom $\mathbb{I}$ är en kompakt mängd och $x(t)$ en kontinuerlig funktion, kommer normen att vara väldefinerad, ty enligt en känd sats från elementär analys antar en kontinuerlig funktion alltid ett maximum över kompakter.

Anm. *(Övning!)* Visa att detta verkligen är en norm. Visa också att denna norm ger en väldefinerad metrik *(använd kontinuiteten!)*

Visa att $\mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ är ett komplett rum, d.v.s. visa att om $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ är en cauchyföljd i maxnormen av kontinuerliga funktioner på det kompakta intervallet $\mathbb{I}$, så konvergerar denna följd mot en kontinuerlig funktion $x(t)$. *(Övning!)*
Använd den likformiga kontinuiteten, då varje $x_k(t)$ är definerat på ett kompakt intervall.

Med detta resultat kommer vi senare med gott samvete kunna använda Banachs fixpunktsats på $\mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$.

Picards metod

Om läsaren erinrar sig exempel 3, definerades där en följd $x_{k+1} = f(x_k)$ med ett startvärde x_0. Insättning av x_0 i utrycket ger x_1, som sätts in för att få ut x_2. Genom att upprepa detta förfarande generas en följd $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ som vi visade konvergerade mot en speciell fixpunkt $x = f(x)$. Villkoret för att detta skulle gälla var att f uppfyllde kraven för en strikt kontraktion.
Vi skall nu göra en analogi med detta exempel, när vi skall bestämma den allmänna lösningen till vårt standard-IVP. Idéen kommer främst från den franske matematikern Émile Picard ($1856 - 1941$).

Betrakta funktionalen $T : \mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ som defineras enligt *(håll t fixt!)* :

$$T(x(t)) = x(0) + \int_0^t f(x(s), s)\, ds = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)\, ds$$

Antag att det existerar en fixpunkt $x(t) \in \mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ till T, då gäller:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)\, ds \;\Rightarrow \dot{x(t)} = f(x(t), t) \quad x(0) = x_0$$

Det sista steget motiveras av integralkalkylens fundamentalsats, att derivatan av integralen är funktionen själv (tänk gärna igenom detta!).

Men detta är ju precis vad vill ha! Således räcker det att visa att T verkligen har en (helst unik) fixpunkt.

Efter att ha definerat ovanstående funktional kan vi undersöka vad som egentligen händer om vi applicerar samma resonemang som i exempel 3, d.v.s. om vi nu betraktar $x(0) = x_0$ som en startfunktion som sätts in i T för att få ut x_1 o.s.v.

M.a.o: Undersök existens av fixpunkter i $\mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ till rekursionsfunktionalen:

$$T(x_{k+1}(t)) = x_0 + \int_0^t f(x_k(s), s)\, ds$$

Anm. Ofta väljer man att definera funktioner utifrån möjliga polynmomutvecklingar (inte bara taylorpolynom!). Till exempel skrivs exponentialfunktion e^x ibland lämpligen som just dess taylorutveckling kring $x = 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Exempel 7 *Låt oss använda Picards metod på följande IVP:*

$$\dot{x} = x \qquad , x(0) = 1$$

Sätt nu alltså $x_0 = 1$ *som startfunktion och börja iterera:*

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + s \\
x_2 &= 1 + \int_0^t 1 + s\, ds = 1 + s + \frac{s^2}{2!} \\
&\vdots \\
x_n &= 1 + \int_0^t 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\, ds = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}
\end{aligned} \tag{1}$$

Man inser från ovan att detta konvergerar mot taylorutvecklingen för e^x kring $x = 0$, vilket ju var att förvänta...
Med denna introduktion i Picards metod kan vi gå vidare till att ställa krav på funktionen $f(x(t), t)$ för att en unik lösning kan erhållas på detta sätt genom iteration.

Existens och entydighet för IVP

Låt oss först definera bollmängden $B(x_0, \varepsilon)$ enligt

$$B(x_0, \varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; |x - x_0| < \varepsilon \}$$

Denna mängd bör tolkas som en sfär i $\mathbb{R}^n$ med radien $\varepsilon > 0$ kring punkten x_0. Vi kommer att behöva en sådan mängd i följande sats:

Låt $f : B(x_0, \varepsilon) \times \mathbb{I}$ *uppfylla Lipschitz villkor. Då existerar* $a > 0$ *och en entydig kontinuerligt deriverbar funktion* $x(t) : \mathbb{I} \supset [-a, a] \to \mathbb{R}^n$ *som uppfyller*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x_0$$

De krav som vi således måste ställa på vår funktion f är att den uppfyller Lipschitz villkor i en liten ε-omgivning kring startpunkten, där ε kan vara hur litet som helst, bara skilt ifrån noll.
Inom parantes kan sägas att detta krav är tillräckligt, men dock inte fullt nödvändigt. Vi skall dock inte intressera oss för detta nu, då Lipschitzvillkoret täcker in en mycket stor klass av funktioner. Det kan emellertid vara intressant att undersöka ett fall då f inte är Lipschitz...

Exempel 8 *Betrakta IVP*

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0$$

som har lösningarna: $x(t) = 0$ *och* $x(t) = t^2$ *för alla* t*, d.v.s. någon unik lösning existerar ej. Vi vill nu visa att* $f(x(t), t) = 2\sqrt{|x(t)|}$ *inte kan vara Lipschitz i något definitionsområde som innehåller startpunkten* $x(0) = 0$*. Repetera Lipschitzvillkoret!*

$$|\, 2\sqrt{|x|} - 2\sqrt{|y|}\, | = \{ \text{ Sätt y=0 } \} = 2\sqrt{|x|} = 2\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,|x - 0|$$

och funktionen $2\,|x|^{-\frac{1}{2}}$ *håller sig inte begränsad av någon konstant* A *när vi närmar oss noll, varför funktionen* inte *är Lipschitz!*

Jag vill nu be läsaren erinnra sig om att vårt normerade rum $\mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ av kontinuerliga funktioner $x(t) : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ är såväl komplett som metriskt, och att existens och entydighet för IVP enligt Picard kan formuleras i termer av att hitta fixpunkter till rekursionsfunktionalen $T : \mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$

$$T(x(t)) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)\, ds$$

Enligt Banachs fixpunktsats existerar en unik fixpunkt till T om T är en strikt kontraktion. Det vore nu bra om vi kunde visa att T alltid kan göras till en strikt kontraktion om vi sätter villkoret att $f(x(t), t)$ är Lipschitz. Låt oss sätta igång!

Eftersom f antas vara Lipschitz existerar $A < \infty$ så att $|f(x(t), t) - f(y(t), t)| \leq A\,|x(t) - y(t)|$ för $t \in [-a, a]$, där vi senare kommer att ställa krav på vilka värden som a för anta. Om vi nu skall visa att T är en strikt kontraktion måste gälla:

$$\| \, T(x(t)) - T(y(t)) \, \| \leq c \, \| \, x - y \, \| \quad c < 1$$

d.v.s,

$$\| \, T(x(t)) - T(y(t)) \, \| = \| \int_0^t f(x(s), s) ds - \int_0^t f(y(s), s) ds \, \|$$

$$= \| \int_0^t f(x(s), s) - f(y(s), s)\, ds \, \| \leq \int_0^t \| \, f(x(s), s) - f(y(s), s) \, \| \, |ds|$$

$$\leq A \int_0^t \| \, x - y \, \| \, |ds| = A \, \| \, x - y \, \| \, |t| \leq A \, \| \, x - y \, \| \, a$$

där vi har använt att

$$|x(t)| \leq \| x \|$$

Kontraktionsegenskapen erhålls om man sedan väljer $aA < 1$, t.ex $a = \frac{1}{3A}$, varefter ovanstående kedja kan sammanfattas:

$$\| T(x(t)) - T(y(t)) \| \leq \frac{1}{2} \| x - y \|$$

I detta fall kan man således garantera att en entydig lösning existerar till IVP i tidsintervallet $\mathbb{I}_a = [-\frac{1}{3A}, \frac{1}{3A}]$.

Att lösningsfunktionen är kontinuerligt deriverbar inses genom att resonera enligt följande : Om f är kontinuerlig och $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ i lösningsintervallet så måste även $\dot{x}(t)$ vara kontinuerlig.

Därmed har vi bevisat vår sats.

Anm. Bollmängdens radie ε ovan väljs sålunda till

$$\max_{t \in I_a} |x(t) - x_0|$$

Denna mängd bör tolkas som det område inom vilket lösningskurvan 'lever'.