Institutionen
för matematik

KTH

Repetitionsmaterial
för kompletteringskurs
i matematik
(5B1114)

Innehåll

E.Petermann/00

1. Potenser och logaritmer

Övningar

1.1 Förenkla uttrycken så långt som möjligt

a. $\frac{\ln 8}{\ln 2} + \ln 8 - \ln 2 + \ln \frac{1}{4}$

b. $\left(\frac{\ln 3}{\log_{10} 3} \cdot \log_{10} e + \frac{1}{\ln 3 \cdot \log_3 e} \right)^3$

c. $\sinh (\ln (\sqrt{a^2 + 1} + a))$ och $\cosh (\ln (\sqrt{a^2 + 1} + a))$

1.2 Lös ekvationerna

a. $\sqrt{e^x} = e^{\sqrt{x}}$ b. $(\sqrt{e})^x = e^{\sqrt{x}}$

c. $e^{2 - x^2} = e^{-x}$

1.3 Lös ekvationen $\sinh x = 1$

1.4 Lös ekvationerna:

a. $\sqrt{\ln (x^2 - 1)} = \sqrt{\ln (x + 1) + \ln (x - 1)}$

b. $\ln (x + 2) + \ln (x + 4) = \ln (2x + 5)$

c. $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$

d. $\ln (x + 6) = \ln (x + 2) + \ln x$

e. $\ln (2 - x^2) = \ln (-x)$

1.5 a. Lös ekvationen $\sqrt{x - 1} = \sqrt{-x - 2}$

b. Bestäm den funktion $y(x)$ som satisfierar ekvationen

$\lg (x^2 y) - \lg (x + 2) = 2$

Ange också funktionens definitionsmängd.

1.6 Avgör utan att använda räknedosa eller motsvarande vilket av talen

$$\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} \quad \text{och} \quad \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

som är störst.

1.7 På vilken höjd över havet kokar vattnet vid 85°?

Sambandet mellan lufttrycket p (mätt i millibar) och vattnets kokpunkt K (mätt i °C) ges i intervallet $100 < p < 3\,000$ med god noggrannhet av

$$K = (1.5 \ln p - 1)^2 + 12$$

Sambandet mellan lufttrycket och höjden h över havet (mätt i km) ges av

$$h = 11 \ln \frac{1013}{p}$$

Definitioner

$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ då $a > 0$ och $\neq 1$ samt $y > 0$

”naturlig logaritm”: $\ln x = \log_e x$

”10-logaritm”: $\lg x = \log_{10} x$

”hyperboliska funktioner”:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

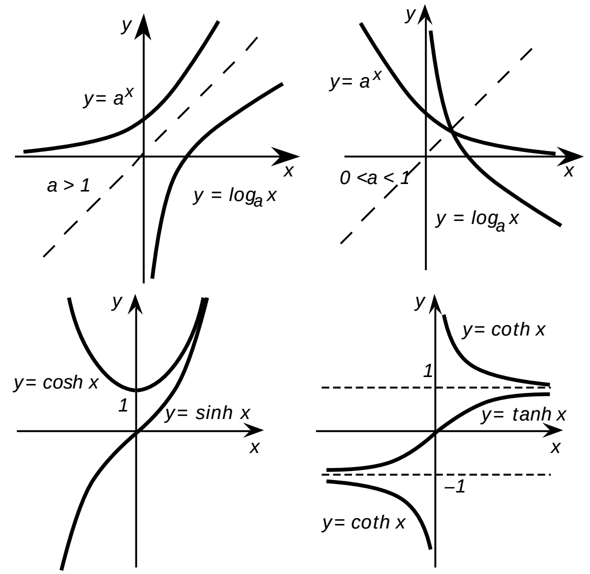
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\coth x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Potenslagar	$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$	**Logaritmlagar**	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
	$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$		$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
	$(ab)^c = a^{b \cdot c}$		$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, *n heltal* ≥ 2		$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Hyperboliska ettan $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Grafer



2. Trigonometriska funktioner

Övningar

2.1 Beräkna exakt

a. $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{3}}{\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{6}}$ b. $\sin\dfrac{\pi}{24}$

2.2 Skriv nedanstående uttryck som en summa av en eller flera termer av formen a, $b\cos\alpha$, $c\sin\beta$, där a, b och c är konstanter

a. $\sin 2x \sin 3x$ b. $\cos^4 x - \sin^4 x$

c. $(\sin x + \cos x)^2$ d. $\sin^2 x \cos^2 y$

2.3 Lös ekvationerna

a. $\sin x = \sin 2x$ b. $\cos 25x = \sin 27x$

c. $\tan 5x = \tan 3x$ d. $\sin x = \cos 3x$

2.4 Lös ekvationerna

a. $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ b. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 3\tan x + 5$

c. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ d. $1 - \cos 2x = \cos x$

e. $4\cos^2 x = \cot x$

2.5 Beräkna exakt

a. $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$ b. $\sin\left(\arccos\dfrac{7}{9}\right)$ c. $\tan\left(\arccos\left(-\dfrac{7}{9}\right)\right)$

2.6 a. Bevisa att om $B \neq 0$ så är $A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \varphi)$ där $\tan\varphi = \dfrac{A}{B}$

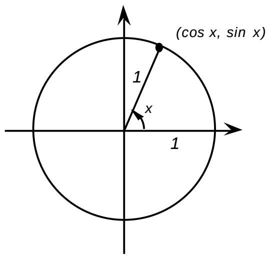
b. Skissera i samma diagram graferna för funktionerna
$y = \cos x$, $y = \sin x$ och $y = 3\cos x + 4\sin x$

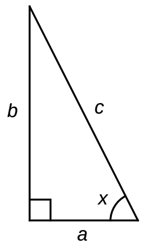
Definitioner

$\sin x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x} = \dfrac{b}{c}$

$\cos x = \dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{a}{c}$

$\tan x = \dfrac{1}{\cot x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{b}{a}$





Trigonometriska ettan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Periodicitet

$$\begin{cases} \sin(x + 2\pi) = \sin x \\ \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \tan(x + \pi) = \tan x \end{cases}$$

Teckenregler

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x = \sin(x + \pi) \\ \cos(-x) = \cos x = -\cos(x + \pi) \\ \tan(-x) = -\tan x \end{cases}$$

Komplementaritet

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

Produktformler

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)] \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] \end{cases}$$

Additionsformler

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ \tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

Vinkelhalvering

$$\begin{cases} \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2} \\ \cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2} \\ \tan^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \end{cases}$$

Vinkelfördubbling

$$\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \\ \qquad = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{cases}$$

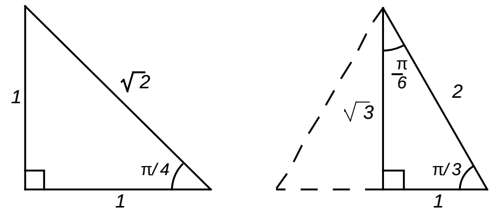
Eulers formler

$e^{iy} = \cos y + i\sin y$

$$\begin{cases} \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = -i\cdot\sinh iy \\ \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cosh iy \end{cases}$$

Speciella värden

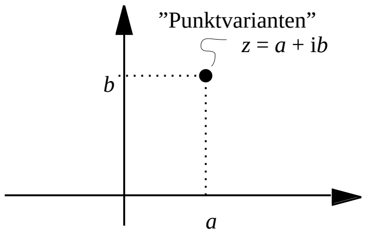
För heltalsmultipler av $\pi/2$ kan sinus- och cosinusfunktionernas exakta värden avläsas från ”cirkeldefinitionen” i figuren på föregående sida. För heltalsmultipler av $\pi/4$ och $\pi/6$ erhålls de exakta värdena med hjälp av trianglarna:

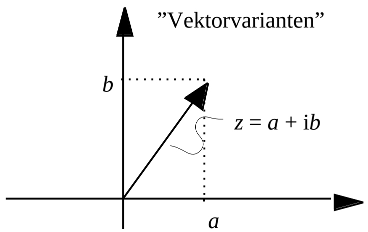


3. Komplexa tal

De fyra räknesätten

Uttrycken $z = a + \mathrm{i}\,b$, där a och b är reella tal och symbolen i har egenskapen att $\mathrm{i}^2 = -1$, kallas *komplexa tal*. Man kan tänka på dem som punkter i ett plan med ett rätvinkligt koordinatsystem, det *komplexa talplanet*. Talet $a + \mathrm{i}\,b$ svarar då mot punkten (eller vektorn) med koordinaterna (a, b)





De komplexa talen kan adderas, multipliceras, subtraheras och divideras med varandra (för divisionen med det vanliga undantaget, att man inte kan dividera med 0):

Exempel 3.1:(De fyra räknesätten)

Om $z = 2 + 3\mathrm{i}$ och $w = 4 - \mathrm{i}$ så är

$$z + w = (2 + 3\mathrm{i}) + (4 - \mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i} + 4 - \mathrm{i} = 6 + 2\mathrm{i},$$

$$z - w = (2 + 3\mathrm{i}) - (4 - \mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i} - 4 + \mathrm{i} = -2 + 4\mathrm{i},$$

$$z\cdot w = (2 + 3\mathrm{i})\cdot(4 - \mathrm{i}) = 2\cdot 4 - 2\cdot\mathrm{i} + 3\mathrm{i}\cdot 4 - 3\mathrm{i}^2 = 8 - 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i} + 3 = 11 + 10\mathrm{i},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2 + 3\mathrm{i}}{4 - \mathrm{i}} = \left[\begin{array}{c}\text{Förläng med}\\ 4 + \mathrm{i}\end{array}\right] = \frac{(2 + 3\mathrm{i})(4 + \mathrm{i})}{(4 - \mathrm{i})(4 + \mathrm{i})} = [\text{Konjugatregeln}] =$$

$$= \frac{(2 + 3\mathrm{i})(4 + \mathrm{i})}{4^2 - \mathrm{i}^2} = \frac{8 - 3 + (2 + 12)\mathrm{i}}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}\,\mathrm{i}. \qquad \blacksquare$$

Division mellan två komplexa tal kan alltid utföras efter samma mönster som i det senaste exemplet, detta om nämnaren $\neq 0$. Man har att

$$\frac{c + \mathrm{i}\,d}{a + \mathrm{i}\,b} = \left[\begin{array}{l}\text{Förläng med } a - \mathrm{i}\,b \text{ och}\\ \text{använd konjugatregeln!}\end{array}\right] = \frac{(c + \mathrm{i}\,d)(a - \mathrm{i}\,b)}{a^2 - (\mathrm{i}\,b)^2} = \frac{(ac + bd) - \mathrm{i}(ad - bc)}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\,\frac{ad - bc}{a^2 + b^2},$$

där nämnaren $a^2 + b^2$ är reell och $\neq 0$ om $a + \mathrm{i}\,b \neq 0$.

Övningar: 3.1 – 2, 4 a - e, 5

Real- och imaginärdel, reella och imaginära axeln

Om $z = a + \mathrm{i}\,b$, där a och b är reella, så säger man att a är *realdelen* och b är *imaginärdelen* av det komplexa talet z. Man skriver också

$$\boxed{\operatorname{Re} z = a \text{ respektive } \operatorname{Im} z = b.}$$ [1]

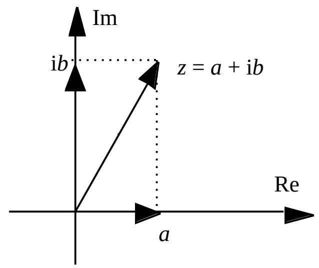
Exempel 3.2: (Real- och imaginärdel)

Enligt det föregående exemplet är $\operatorname{Re}\dfrac{2 + 3\mathrm{i}}{4 - \mathrm{i}} = \dfrac{5}{17}$ och $\operatorname{Im}\dfrac{2 + 3\mathrm{i}}{4 - \mathrm{i}} = \dfrac{14}{17}$ $\blacksquare$

Varje reellt tal a är samtidigt ett komplext tal eftersom

$$a = a + \mathrm{i}\cdot 0.$$

Dessa svarar i det komplexa talplanet mot punkterna på den ”horisontella” axeln som därför kallas den *reella axeln*. På den andra axeln ligger talen av formen $0 + \mathrm{i}\,b = \mathrm{i}\,b$, de så kallade *imaginära talen*, varför axeln kallas den *imaginära axeln*.



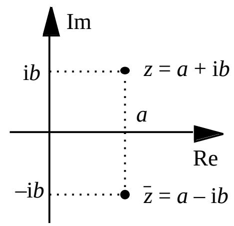
Övningar: 3.3.

Konjugering

Talet $a - \mathrm{i}\,b$, där a och b reella, kallas *konjugatet* till $z = a + \mathrm{i}\,b$ och man skriver

$$\boxed{\bar{z} = a - \mathrm{i}\,b}$$

Geometriskt motsvarar konjugatet till punkt dess spegelbild i den reella axeln.



Konjugering kan ses som ett slags räknesätt. Följande egenskaper hos det är värda att notera:

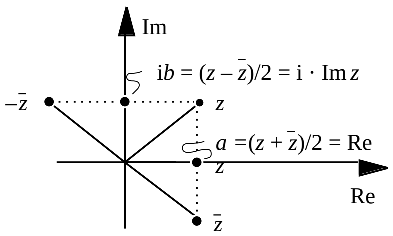
$\bar{\bar{z}} = z$	ty $\overline{\overline{a + \mathrm{i}\,b}} = \overline{a - \mathrm{i}\,b} = a + \mathrm{i}\,b$,
$\bar{z} = z \;\Leftrightarrow\; z$ reellt	ty $a - \mathrm{i}\,b = a + \mathrm{i}\,b \;\Leftrightarrow\; b = 0$,
$\bar{z} = -z \;\Leftrightarrow\; z$ imaginärt	ty $a - \mathrm{i}\,b = -a - \mathrm{i}\,b \;\Leftrightarrow\; a = 0$,
$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$	ty båda leden $= a + c - \mathrm{i}(b + d)$,
$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$	ty båda leden $= a - c - \mathrm{i}(b - d)$,
$\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$	ty båda leden $= ad - bc - \mathrm{i}(ac + bd)$,
$\overline{(1/z)} = 1/\bar{z}$	ty båda leden $= (a + \mathrm{i}\,b)/(a^2 + b^2)$,
$\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$	ty $\overline{(z/w)} = \overline{(z\cdot 1/w)} =$

[1] Observera att imaginärdelen är ett *reellt* tal.

$$= \bar z \cdot \overline{(1/w)} = \bar z \cdot (1/\bar w) = \bar z / \bar w.$$

Dessutom gäller:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{z + \bar z}{2} \\ \operatorname{Im} z &= \frac{z - \bar z}{2\mathrm{i}} \end{aligned}}$$



Exempel 3.3: (Lösning av ekvation med hjälp av konjugering)

Lös ekvationen $(3 + 2\mathrm{i})z + 5\bar z = 2 - 4\mathrm{i}$.

Lösning: Konjugering av ekvationen ger i vänsterledet: $\overline{(3 + 2\mathrm{i})z + 5\bar z} =$

$= \overline{(3 + 2\mathrm{i})z} + \overline{5\bar z} = \overline{(3 + 2\mathrm{i})} \cdot \bar z + 5\,\bar{\bar z} = (3 - 2\mathrm{i})\,\bar z + 5z$

och i högerledet: $\overline{(2 - 4\mathrm{i})} = 2 + 4\mathrm{i}$.

Ekvationen är därför ekvivalent med:

$$\begin{cases} (3 + 2\mathrm{i})z + 5\bar z = 2 - 4\mathrm{i} & [1] \\ 5z + (3 - 2\mathrm{i})\,\bar z = 2 + 4\mathrm{i} & [2] \end{cases}$$

vilket är ett linjärt ekvationssystem med komplexa koefficienter i de obekanta z och $\bar z$. Ett sådant system kan lösas med exakt samma räkneteknik som motsvarande reella system. Man använder bara räknereglerna för de fyra räknesätten under kalkylens gång och dessa regler gäller ju också för de komplexa talen.

Eftersom vi mest är intresserade av variabeln z eliminerar vi $\bar z$ genom att bilda $(3 - 2\mathrm{i}) \times [1] - 5 \times [2]$. Man får då
$[(3 - 2\mathrm{i})\cdot(3 + 2\mathrm{i}) - 5\cdot 5]z = (3 - 2\mathrm{i})\cdot(2 - 4\mathrm{i}) - 5(2 + 4\mathrm{i})$, dvs $-12z = -12 - 36\mathrm{i}$,
varav $z = 1 + 3\mathrm{i}$. ■

Anmärkning: Ett alternativt sätt att lösa ekvationen är, att man från början ansätter att $z = x + \mathrm{i}y$, där x och y är reella obekanta.

Eftersom $\bar z = x - \mathrm{i}y$, så kan ekvationen skrivas

$$(3 + 2\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) + 5(x - \mathrm{i}y) = 2 - 4\mathrm{i}.$$

Samlar man här alla reella respektive imaginära termer för sig får man

$$(3x - 2y + 5x) + (3y + 2x - 5y)\mathrm{i} = 2 - 4\mathrm{i}.$$

Eftersom de båda komplexa storheterna i höger- respektive vänsterled bara kan vara lika om deras real- och imaginärdelar är lika, så får man ett ekvationssystem – den här gången med reella koefficienter och obekanta:

$$\begin{cases} 8x - 2y = 2 & [3] \\ 2x - 2y = -4 & [4] \end{cases}$$

Ur [3] – [4] får man $6x = 6$, ur [3] – 4×[4] till sist $6y = 18$. Det sökta komplexa talet är $z = 1 + 3\mathrm{i}$.

Oftast är det ingen fördel att som i den senare lösningsmetoden transformera ett problem uttryckt i komplexa storheter till motsvarande problem som handlar om reella talpar. Jämför de två metoderna till exempel genom att beräkna lösningen av en ekvation som $(3 + 2\mathrm{i})z = 52\mathrm{i}$, dels genom att utföra den komplexa divisionen $52\mathrm{i}/(3 + 2\mathrm{i})$ och dels genom att sätta $z = x + \mathrm{i}y$, transformera det hela till ett reellt ekvationssystem med x och y som obekanta och sedan lösa detta. ■

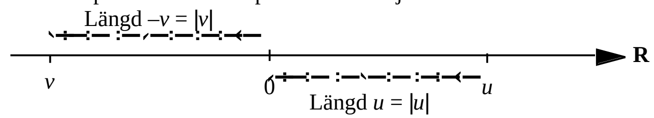
Övningar: 3.4 f – h, 7 a – b.

Belopp av komplext tal

Beloppet av ett reellt tal x definieras som bekant av

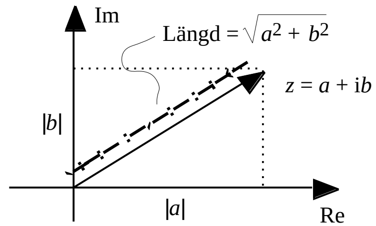
$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

dvs $|x|$ är avståndet mellan punkterna x och 0 på den reella linjen.



På motsvarande sätt definierar man beloppet för ett komplext tal z som avståndet mellan punkterna 0 och z i det komplexa talplanet. Dvs om $z = a + \mathrm{i}\,b$, där a och b är reella, så är

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$



Eftersom $a^2 + b^2 = (a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = z \cdot \bar z$, så kan detta också skrivas

$$\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \bar z}}$$

Exempel 3.4: (Belopp av komplext tal)

$$|5 - 12\mathrm{i}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$|\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1,$$

$$\left|\frac{1}{a + \mathrm{i}\,b}\right| = \left|\frac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|a + \mathrm{i}\,b|}$$ ■

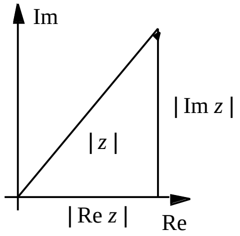
Ur relationen $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ avläser man att

$$|z| \geq \sqrt{a^2} = |a| = |\text{Re } z|,$$

med likhet om och endast om $b = 0$ och $a \geq 0$, dvs om z är reellt.
På motsvarande sätt gäller att

$$|z| \geq |\text{Im } z|,$$

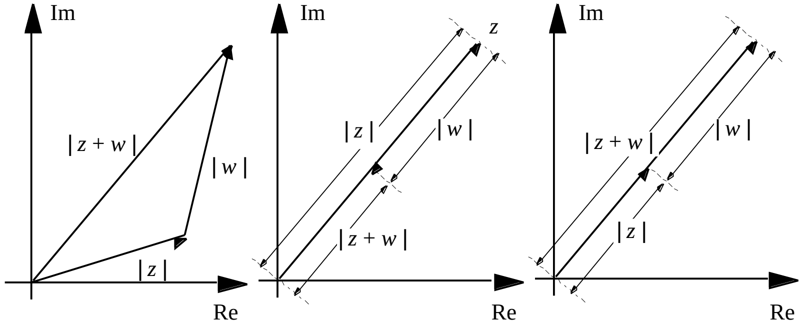
med likhet om och endast om z är imaginärt.
För de fall att z inte ligger på någon av axlarna svarar detta helt enkelt emot att hypotenusan, $|z|$, i en rätvinklig triangel alltid är större än var och en av sina kateter $|\text{Re } z|$ och $|\text{Im } z|$.



Allmännare: Eftersom vektorerna z, w och $z + w$, om de inte är parallella, alltid bildar tre sidor i en triangel så måste

$$|z + w| < |z| + |w|,$$

Om vektorerna är parallella men riktade åt olika håll så gäller samma olikhet. Om de däremot är lika riktade så råder likhet mellan de båda leden:



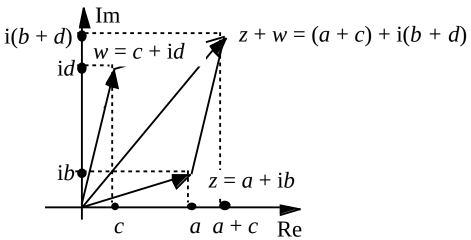
Icke-parallella z och w	Parallella men motriktade	Lika riktade
$\|z + w\| < \|z\| + \|w\|$	$\|z + w\| < \|z\| + \|w\|$	$\|z + w\| = \|z\| + \|w\|$

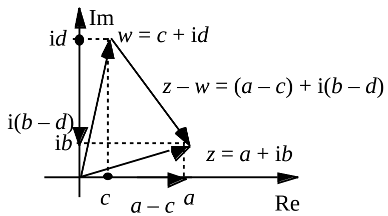
Den generellt riktiga relationen, $\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|}$ kallas *triangelolikheten*.

Övningar: 3.6 – 7.

Geometriska tolkningar av addition och subtraktion.

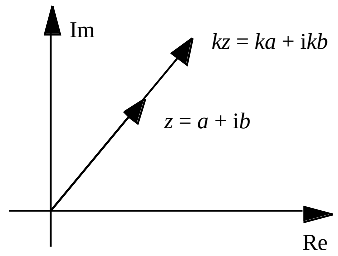
Additionen har en enkel geometrisk tolkning: Den svarar mot vektoraddition av motsvarande vektorer. För subtraktionen har man ett liknande förhållande:



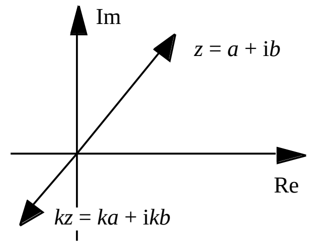


:

Om k är ett reellt tal så svarar produkten $kz = k(a + \text{i } b) = ka + \text{i } kb$ mot att vektorn z multipliceras med skalären k:

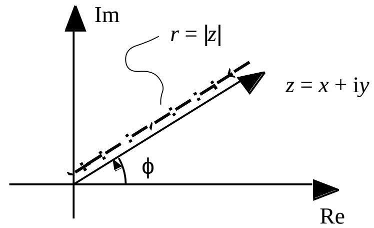


$k > 0$, vektorn kz har samma riktning som z och är k ggr längre.

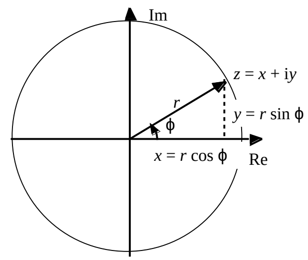


$k < 0$, vektorn kz har motsatt riktning mot z och är $|k|$ ggr längre.

Polär form av komplexa tal



Real- och imaginärdelarna a respektive b till ett komplext tal $z = a + \text{i } b$ anger talets läge i talplanet som koordinater i ett rätvinkligt koordinatsystem. Givetvis finns det många andra sätt att beskriva en punkts läge i ett plan. Ett som är mycket användbart, till exempel om man vill studera vridningar i planet, är de så kallade *polära koordinaterna*: Som lägesbeskrivning tar man dels motsvarande vektors längd r (= $|z|$ = punktens avstånd från 0), dels en vinkel ϕ, som den reella axeln skulle behöva vridas för att få samma riktning som z. Motursvridningar räknas därvid som positiva.
Enligt definitionerna av funktionerna sin ϕ och cos ϕ så har man som samband mellan dessa polära koordinater r och ϕ och real- och imaginärdelarna x och y:



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}}$$

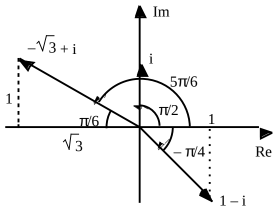
och $\qquad \boxed{z = r\,(\cos \phi + \text{i} \sin \phi)},$

Man säger att talet z angetts på *polär form*.
Man har alltså $\qquad \boxed{r = |z|}$

Vridningsvinkeln ϕ kallas talets *argument*. Eftersom man kan nå samma punkt genom olika vridningar som skiljer på ett antal hela varv, är argumentet inte entydigt definierat. Man låter arg z beteckna mängden av alla dessa vridningar. Om ϕ är en av dem så är alltså

$$\boxed{\arg z = \phi + 2n\pi, \text{ (}n\text{ betecknar heltal)}}$$

Exempel 3.5:(Polär form av komplexa tal)



- $z = i \quad r = |i| = 1$

och $\phi = \frac{\pi}{2}$ (eller någon av vinklarna $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$),

polär form av talet i är alltså $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

- $z = 1 - i \quad r = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

och $\phi = -\frac{\pi}{4}$, alltså

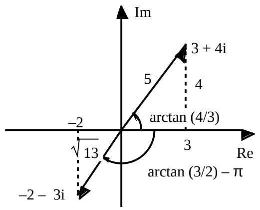
$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

- $z = -\sqrt{3} + i \quad r = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ och $\phi = \frac{5\pi}{6}$,

alltså $-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

- $z = 3 + 4i \quad r = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ och $\phi = \arctan\frac{4}{3}$, alltså

$3 + 4i = 5\left[\cos\left(\arctan\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right)\right]$



- $z = -2 - 3i$

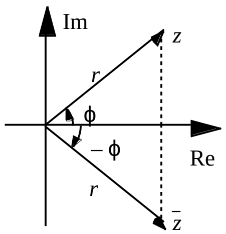
$r = |-2 - 3i| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

och $\phi = \arctan\frac{3}{2} - \pi$,

alltså $-2 - 3i = \sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \pi\right) + i\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \pi\right)\right]$ ■

Notera också att den polära framställningen av talet $\bar{z}$ på ett enkelt sätt är relaterad till z:s polära framställning: Eftersom vektorn $\bar{z}$ är spegelbilden i reella axeln av vektorn z så är

$$|\bar{z}| = |z| \text{ och } \arg \bar{z} = -\arg z,$$
$$\bar{z} = r(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi))$$



Övningar: 3.9.

Geometrisk tolkning av multiplikation och division.

Om $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ och $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ så får man för produken $z_1 \cdot z_2$:

$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$

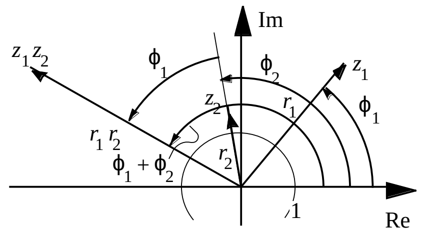
$r_1 r_2[(\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2) + i(\cos\phi_1 \cdot \sin\phi_2 + \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2)] =$

$=$ [Enligt additionssatserna för sinus- och cosinusfunktionerna] $=$

$= r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)],$ [P]

vilket anmärkningsvärt nog är en polär framställning av produkten i fråga. Man avläser att,

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|,}$$
$$\boxed{\arg(z_1 \cdot z_2) = \phi_1 + \phi_2 = \arg z_1 + \arg z_2,}$$



Att multiplicera ett tal z_2 med z_1 innebär att vektorn z_2 vrids ϕ_1 radianer och att dess längd mulipliceras med z_1:s längd.

Multiplikation av två komplexa tal svarar alltså mot *addition* av deras argument. Situationen påminner om potenslagen $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$ där multiplikationen i det ena ledet svarar mot en addition av exponenterna i det andra. Bl a därför *definierar* man:

$$\boxed{e^{i\phi} \overset{\text{def}}{=} \cos\phi + i\sin\phi}$$

Den polära framställningen av ett komplext tal får då den koncisare formen

$$z = r\,e^{i\phi}$$

och relationen [P] ovan kan skrivas

$$r_1 e^{i\phi_1}\, r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2\, e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

Definierar man sedan exponentialfunktionen för en godtycklig *komplex* exponent enligt

$$\boxed{e^z = e^{a + ib} \overset{\text{def}}{=} e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)}$$

så kommer potenslagen för multiplikation att gälla för alla komplexa exponenter:

För $z = a + ib$ och $w = c + id$ är nämligen:

$$e^z \cdot e^w = e^a \cdot e^{ib} \cdot e^c \cdot e^{id} = e^{(a+c)} \cdot e^{i(b+d)} = e^{(a+c) + i(b+d)} = e^{z+w}.$$

Exempel 3.6:(Polär framställning med hjälp av exponentialfunktionen)

De komplexa talen i det föregående exemplet är alltså enligt detta skrivsätt:

$i = e^{i\pi/2}$, $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, $-\sqrt{3} + i = 2\,e^{i5\pi/6}$, $3 + 4i = 5\,e^{i\arctan(4/3)}$ resp

$-2 - 3i = \sqrt{13}\,e^{i[\arctan(3/2) - \pi]}$. ■

Notera också relationerna $\boxed{e^{i\pi} = -1}$,

$$\boxed{e^{i2\pi} = 1}$$

och

$$\boxed{e^{i\phi_1} = e^{i\phi_2} \iff \phi_1 = \phi_2 + 2n\pi, n \text{ ett heltal.}}$$

Ur likheterna
$$\begin{cases} \cos\phi + i\sin\phi = & = e^{i\phi} \\ \cos\phi - i\sin\phi = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) & = e^{-i\phi} \end{cases}$$

får man efter addition respektive subtraktion,

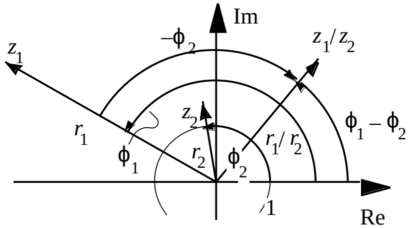
$$2\cos\phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi} \text{ och } 2i\sin\phi = e^{i\phi} - e^{-i\phi}$$

dvs
$$\boxed{\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \\ \sin\phi &= \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \end{aligned}}$$
Eulers formler

För division gäller tydligen att

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\ e^{i\phi_1}}{r_2\ e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i\phi_1}\cdot\frac{1}{e^{i\phi_2}} \stackrel{(2}{=} \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i\phi_1}\cdot e^{-i\phi_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

I figur kan detta beskrivas så här:



z_1/z_2 är den vektor man får om z_1 vrids $-\phi_2$ radianer
och dess längd divideras med z_2:s längd.

För en produkt med k st faktorer har man:

$$e^{i\phi_1}\cdot e^{i\phi_2}\cdot\ldots\cdot e^{i\phi_k} = e^{i(\phi_1+\phi_2+\ldots+\phi_k)}$$

Om alla argumenten är lika får man det speciella fallet:

$(e^{i\phi})^k = e^{ik\phi}$ eller skrivet utan exponentialfunktioner

$$\boxed{(\cos\phi + i\sin\phi)^k = \cos k\phi + i\sin k\phi}$$

Sambandet kallas *de Moivres formel*. Talet k är då tills vidare ett positivt heltal. Notera dock att formeln också gäller för $k = 0$ om man överenskommer att $z^0 = 1$ även för komplexa z. Formeln gäller dessutom också för negativa heltalsexponenter:

Om $-k < 0$: $(e^{i\phi})^{-k} = 1/(e^{i\phi})^k = \left[\text{Nyss visat}\right] = 1/(e^{ik\phi}) = e^{i(-k)\phi}$,

Den komplexa exponentialfunktionen kan underlätta räknearbetet avsevärt också om man egentligen är ute efter resultat angående reella storheter:

Exempel 3.7: (Härledning av trigonometriska formler)

Man har att

$$\begin{aligned} &\cos 2\phi + i\sin 2\phi = e^{2i\phi} = (e^{i\phi})^2 = (\cos\phi + i\sin\phi)^2 = \\ &= \cos^2\phi + 2i\cos\phi\sin\phi - \sin^2\phi = (\cos^2\phi - \sin^2\phi) + i(2\sin\phi\cdot\cos\phi). \end{aligned}$$

Identifikation av de respektive ledens real- och imaginärdelar ger sambanden:

$$\begin{cases} \sin 2\phi = 2\sin\phi\cdot\cos\phi \\ \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{cases}$$

På motsvarande sätt enligt binomialsatsen för 3:e-potenser:

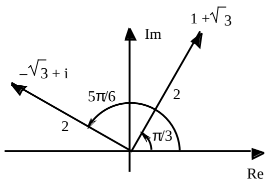
$$\begin{aligned} &\cos 3\phi + i\sin 3\phi = e^{3i\phi} = (e^{i\phi})^3 = (\cos\phi + i\sin\phi)^3 = \\ &= \cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi = \\ &= (\cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi) + i(3\sin\phi\cdot\cos^2\phi - \sin^3\phi) = \\ &= \left[\text{Trigonometriska ettan}\right] = \\ &= [\cos^3\phi - 3\cos\phi\,(1-\cos^2\phi)] + i[3\sin\phi\cdot(1-\sin^2\phi) - \sin^3\phi], \end{aligned}$$

varav
$$\begin{cases} \sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi \\ \cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi \end{cases}$$
■

I nästa exempel drar man nytta av att de förhållandevis besvärliga räknesätten ”multiplikation” och ”division” motsvaras av de enklare ”addition” och ”subtraktion” i exponenterna:

Exempel 3.8:

Förenkla $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{50}}{(-\sqrt{3}+i)^{38}}$.



Lösning: Eftersom enligt figuren här bredvid

$1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{i\pi/3}$ och $-\sqrt{3} + i = 2\,e^{i5\pi/6}$,

har man att

$(1+i\sqrt{3})^{50} = 2^{50}\,e^{i50\pi/3}$ och $(-\sqrt{3}+i)^{38} = 2^{38}\,e^{i38\cdot5\pi/6} = 2^{38}\,e^{i95\pi/3}$.

Alltså $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{50}}{(-\sqrt{3}+i)^{38}} = 2^{(50-38)}\,e^{i(50-95)\pi/3} = 2^{12}\,e^{-i45\pi} = \left[\begin{array}{l}\text{Lägg till 23 hela varv,} \\ \text{dvs addera } 46\pi i \text{ till} \\ \text{exponenten.}\end{array}\right] =$

$= 2^{12}\,e^{i\pi} = 2^{12}\,(-1) = -4096.$ ■

Övningar: 3.10 – 11.

Andragradsekvationer

Ekvationen $z^2 = w$ har för *reella* w lösningarna

$z = \pm\sqrt{w}$ (om $w \geq 0$) – två tal på den reella axeln alltså, och
$z = \pm i\sqrt{w}$ (om $w < 0$) – vilket är två tal på den imaginära axeln.

Om w är ickereellt är det däremot inte lika lätt att se var i det komplexa talplanet eventuella lösningar ligger. Följande exempel visar en metod för att reda ut sådana problem:

Exempel 3.9: (Lösning av andragradsekvation av typ $z^2 = w$)

Bestäm på formen $a + i\,b$ (a och b reella) alla lösningar till

$$z^2 = -7 - 24i$$

Lösning: Sätter man $z = x + i\,y$, där x och y är reella, så får man $(x + i\,y)^2 = -7 - 24i \Leftrightarrow$

[2] Obs t ex att $e^{i\phi_2}$ är en punkt på enhetscirkeln. Då är dess invers $1/e^{i\phi_2}$ identisk med dess transponat $e^{-i\phi_2}$.

$x^2 - y^2 + 2xyi = -7 - 24i$. Identifieras sedan real- och imaginärdelarna i dessa båda led ger detta $x^2 - y^2 = -7$, samt $2xy = -24$. Vidare gäller för beloppet gäller av de båda leden i den givna ekvationen $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} = 25$, Alltså

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 32 \\ xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 4 \\ xy = -12 \end{cases}$$

Detta ger $x = \pm 3$ och $y = \mp 4$, där de övre och de undre tecknen hör ihop (ty $xy < 0$). De sökta talen är alltså $z = \pm(3 - 4i)$. ■

En allmän komplex andragradsekvation har formen:

$z^2 + pz + q = 0$, där p och q är komplexa koefficienter.

Sådana kan omformas på samma sätt som motsvarande reella ekvationer:

$$z^2 + pz + q = 0 \overset{\text{Kvadrat-}}{\underset{\text{komplettering}}{\Leftrightarrow}} \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Sätter man här $z + \frac{p}{2} = \zeta$ får man ekvationen $\zeta^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Om högerledet $\frac{p^2}{4} - q$ är reellt, så kan den ekvationen lösas direkt genom rotutdragning. Om högerledet däremot är ickereellt, så får man istället använda förfarandet i det förra exemplet.

Exempel 3.10: (Lösning av andragradsekvationer av typen $z^2 + pz + q = 0$.)

a. Bestäm på formen $a + i\,b$ (a och b reella) lösningarna till

$$z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0.$$

Lösning: Kvadratkomplettering ger

$z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0 \Leftrightarrow (z - (2 + i))^2 - (2 + i)^2 + 7 + 4i = 0 \Leftrightarrow$

$(z - (2 + i))^2 = (2 + i)^2 - 7 - 4i = 4 + 4i - 1 - 7 - 4i = -4$, varför

$z - (2 + i) = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i$, dvs

$$z = 2 + i \pm 2i = \begin{cases} 2 + 3i \\ 2 - i \end{cases}$$

b. Samma problem angående ekvationen

$$iz^2 + (2 + 4i)z + 8 + 6i = 0.$$

Lösning: För att få koefficienten för z^2-termen till 1, dividerar vi först ekvationen med talet i och får:

$z^2 + (4 - 2i)z + 6 - 8i = 0$

Kvadratkomplettering ger:

$z^2 - (4 - 2i)z + 6 - 8i = 0 \Leftrightarrow (z - (2 - i))^2 - (2 - i)^2 + 6 - 8i = 0 \Leftrightarrow$

$(z - (2 - i))^2 = (2 - i)^2 - 6 + 8i = 4 - 4i - 1 - 6 + 8i = -3 + 4i.$

Sätter man $z - (2 - i)$ $(= \zeta) = x + iy$, där x och y är reella så erhålls:

$(x + iy)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i$. $x^2 + y^2 = |-3 + 4i| = 5$

Detta ger

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Alltså $x = \pm 1$ och $y = \pm 2$, där de övre och de undre tecknen hör ihop (ty $xy > 0$).

Vi har alltså att $z - (2 - i)$ $(= \zeta) = x + iy = \pm(1 + 2i)$, dvs

$$z = 2 - i \pm (1 + 2i) = \begin{cases} 3 + i. \\ 1 - 3i. \end{cases}$$ ■

Övningar: 3.13a – i.

Binomiska ekvationer

En ekvation med z som obekant, $z^n = w$, där n är ett positivt heltal och w är en komplex konstant, kallas en *binomisk ekvation*.[3] Lösningarna kallar man ”w:s n:te-rötter”.

Specialfallet $n = 2$ granskades i det föregående avsnittet, där man löste ekvationen via ansatsen $z = x + iy$, vilket gav ett ekvivalent reellt system i de obekanta x och y. Den metoden visar sig inte särskilt lämplig för då $n \geq 3$. De allmännare binomiska ekvationerna kan dock ändå lösas med ett annat förfarande som bygger på det polära framställningssättet av komplexa tal:

Exempel 3.11: (Lösning av binomisk ekvation)

Bestäm alla komplexa z sådana att $z^3 = 8i$.

Lösning: Skrivs z och 8i på polär form får man,

$$z = r\,e^{i\phi} \text{ och } 8i = 8e^{i\pi/2},$$

där $r \geq 0$ och ϕ är två reella obekanta. Den binomiska ekvationen är då ekvivalent med

$$(r\,e^{i\phi})^3 = 8e^{i\pi/2} \Leftrightarrow r^3 e^{i3\phi} = 8e^{i\pi/2}.$$

Eftersom båda leden är komplexa tal på polär form, så måste respektive belopp vara lika. Argumenten behöver dock inte vara lika, men om de skiljer sig, så är skillnaden ett helt antal varv:

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \text{ ett heltal} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \phi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \text{ ett heltal} \end{cases}$$

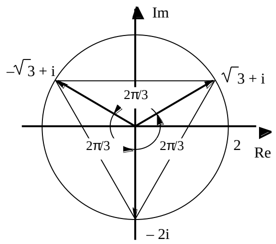
Alltså $z = 2\,e^{i(\pi/6 + 2k\pi/3)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

vilket skenbart verkar ge oändligt många lösningar, men eftersom argumentet ökar med 2π om k ökar med 3, och $e^{i2\pi} = 1$, så finns det bara 3 olika:

[3] Namnet kommer av att ekvationen kan skrivas $z^n - w = 0$, där vänsterledet har *två* termer – det är ett *bi*nom.

$$z = \begin{cases} 2\,e^{i\pi/6} & (k=0) \\ 2\,e^{i5\pi/6} & (k=1) \\ 2\,e^{i3\pi/2} & (k=2) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2\,(\cos \pi/6 \;+ i \sin \pi/6) & = \sqrt{3} + i \\ 2\,(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6) & = -\sqrt{3} + i \\ 2\,(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2) & = -\,2i \end{cases}$$



Lösningarna ligger tydligen alla på cirkeln $|z| = 2$. Eftersom vinkeln mellan två succesiva lösningsvektorer är ett 3:e-dels varv, $2\pi/3$, så ligger de dessutom i hörnen på en liksidig triangel. ■

Metoden i exemplet kan användas för att lösa binomiska ekvationer i allmänhet:

Om $z = r\,e^{i\phi}$ och $w = \rho\,e^{i\alpha}$ får man,

$$z^n = w \;\Leftrightarrow\; (r\,e^{i\phi})^n = \rho\,e^{i\alpha} \;\Leftrightarrow\; r^n e^{in\phi} = \rho\,e^{i\alpha}.$$

Identifikation av belopp och argument ger,

$$\begin{cases} r^n = \rho, & [1] \\ n\phi = \alpha + 2k\pi,\; k \text{ ett heltal.} & [2] \end{cases}$$

Eftersom r och $\rho \geq 0$ så har [1] som enda lösning $r = \sqrt[n]{\rho}$, och ur [2] får man

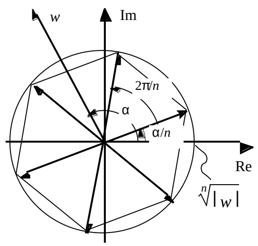
$$\phi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n},\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De sökta talen har alltså formen

$$z = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i(\alpha/n + 2k\pi/n)},\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Också här får man bara ändligt många lösningar, n st närmare bestämt, eftersom argumentet ökar med 2π då k-värdet ökar med n. Lösningen till den binomiska ekvationen kan alltså t ex skrivas:

$$z = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i(\alpha/n + 2k\pi/n)},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$



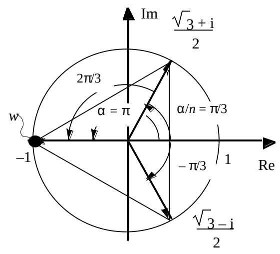
Dessa lösningar ligger alla på cirkeln $|z| = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|w|}$ och i hörnen på en regelbunden n-hörning – vinkeln mellan två på varandra följande lösningsvektorer är ett n:te-dels varv, $\frac{2\pi}{n}$.

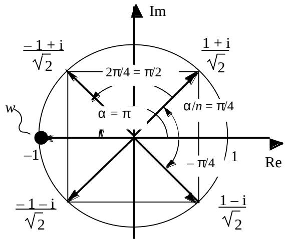
Argumentet för en av lösningarna, $\frac{\alpha}{n}$, är tydligen en n:te-del av w:s argument α.

Geometriska fakta av detta slag gör att man i enkla fall kan avläsa rötterna i figur:

Exempel 3.12:

3:e- och 4:e rötterna ur talet –1 kan ses i figurerna.
De ligger på enhetscirkeln eftersom $|-1| = 1$:





3:e-rötterna är –1 och $\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4:e-rötterna är $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ ■

Övningar: 3.13 m – p.

Övningar:

3.1 Skriv på formen $a + i\,b$, där a och b är reella:

a. $i(2 + i)$ b. $(1 + i)^2$ c. $(2 + i)(3 + i)(2 - i)$

d. $\frac{8 + 6i}{i}$ e. $(1 + 3i)^2 - (1 + 4i)^2$ f. $1 + i + i^2 + i^3$

g. i^n, n heltal, h. $(1 + i\sqrt{3})^3$

3.2 Skriv på formen $a + i\,b$, där a och b är reella:

a. $\frac{-7 + 24i}{3 + 4i}$ b. $\frac{3 + i}{1 + 2i} + \frac{3 - i}{1 - 2i}$ c. $\frac{1 + \frac{1}{3 - i}}{2 - \frac{5}{3 - i}}$

d. $\left(\frac{1 + \sqrt{3}\,i}{\sqrt{3} - i}\right)^2 + \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2$ e. $i + \frac{1}{1 - i + \frac{1}{1 + 2i}}$

3.3 Ange Re z och Im z då

a. $z = 2i + 3$, b. $z = \frac{i + 3}{\sqrt{2}}$, c. $z = 6i$ d. $z = \frac{1}{\pi}$

3.4 Lös ekvationerna:

a. $iz + 1 = z - 3i$ b. $\frac{iz - 1}{z - i} = 6 - i$ c. $\frac{iz + 1}{z - i} = 6 - i$

d. $\frac{2 - 3i}{z + 5 - 6i} = \frac{1}{z - 2 - 5i}$ e. $\frac{z + 3i}{z + 2i} = \frac{iz + 2 + i}{iz + 2}$

f. $z + 2i\,\bar{z} = 6i$ g. $z + \bar{z} = 6i$ h. $z - \bar{z} = 6i$

3.5 Bestäm alla z och w för vilka

$$\begin{cases} (1+i)z + (1-i)w = 5-3i \\ 5iz + w = 13i \end{cases}$$

3.6 Bestäm $|z|$ då

a. $z = 3-4i$ b. $z = 3+2i$ c. $z = (3-4i)+(3+2i)$

d. $z = (3-4i)(3+2i)$ e. $z = \dfrac{3-4i}{3+2i}$ f. $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$

g. $z = 1+\cos\alpha + i\sin\alpha,\ -\pi < \alpha \le \pi$

3.7 Ge en geometrisk tolkning av följande relationer:

a. $z + \bar{z} = 9$ b. $z\bar{z} = 9$ c. $|z-1+i| = 2$

d, $|z-1+i| > 2$

3.8 Visa att $2|z+3i| = |z| \Leftrightarrow |z+4i| = 2$. Tolka detta geometriskt.

3.9 Bestäm belopp, argument och polär framställning till de komplexa talen:

a. -7 b. $3i$ c. $-1+i$

d. $\dfrac{i}{i+1}$ e. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ f. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$

g. $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5(1-i)^8}{(\sqrt{3}-i)^9}$ h. $7+24i$

i. $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$

3.10 Skriv på formen $a + i\,b$, där a och b är reella:

a. $e^{i\pi/4}$ b. $e^{5i\pi/3}$ c. $e^{-5\pi i/6}$

d. e^{i} e. $e^{\pi/2 + i\pi/2}$ f. $e^{(2+3i)x}$, x reellt

3.11 Skriv på formen $a + i\,b$, där a och b är reella:

a. $(1+i)^{10}$ b. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1001}$

c. $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5(1-i)^8}{(\sqrt{3}-i)^9}$

***3.12** Visa att om $|z| = 1$ och $z \ne w$ så är $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1$.

3.13 Lös ekvationerna:

a. $z^2 = 2i$ b. $z^2 = -8+6i$ c. $z^4 = -7+24i$

d. $z^2 = -2+2i$ e. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 = -1$ f. $z^2 - (3+2i)z - 1 + 3i = 0$

g. $z^2 - (2+8i)z - 14 + 8i = 0$ h. $z^2 + (2+9i)z - 17 + 19i = 0$

i. $(3+4i)z^2 + (4+22i)z + 25 = 0$ j. $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$

k. $z^4 - 4 = 2i(z^2 - 2)$ l. $z^2 + 2i\,\bar{z}^2 = 5-2i$

m. $z^3 = i$ n. $z^6 + 64 = 0$

o. $z^6 - (1+i)z^3 + i = 0$ p. $z^5 = 243$

4. Polynom

Definitioner

Uttryck som kan skrivas

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad [S]$$

där $a_0, \ldots a_n$ är komplexa tal och x en variabel, kallas *polynom*.
Talen $a_0, \ldots a_n$ är polynomets *koefficienter* och uttrycken $a_0,\ a_1x, \ldots,$ $a_{n-1}x^{n-1}, a_n x^n$ polynomets *termer*. Polynom som bara består av en term kallas också *monom*.

Exempel 4.1:

$$p_1(x) = x,\ p_2(x) = e\,x^2 + \frac{1}{\pi}x^3,\ p_3(x) = \frac{x^2+x^4}{x^2+1},\ p_4(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}$$

är alla polynom. De två sista för att de förenklas till formen [S]:

$$\frac{x^2+x^4}{x^2+1} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2+1} = x^2 \text{ resp. } \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = x^2 + 2.$$

Polynomen p_1 och p_3 är tydligen monom. ■

Polynom utvecklade som i [S] sägs vara på *standardform*. *Graden* av ett polynom p, grad p, är den största faktiskt förekommande exponenten i polynomets standardform. För polynomet [S] är graden n om $a_n \ne 0$.

Exempel 4.2:

För polynomen i det föregående exemplet är grad $p_1 = 1$, grad $p_2 = 3$ och grad p_3 = grad $p_4 = 2$.
För polynomet $p_5(x) = (x+1)^2 - x^2 - 2x$ är graden 0, detta eftersom förenkling till standardform ger $p_5(x) = (x^2 + 2x + 1) - x^2 - 2x = 1\ (= x^0)$.

Observera att konstanterna $p(x) = a_0$ också är polynom!
För $a_0 \ne 0$ är deras grad = 0. ■

Ett speciellt fall är polynomet där alla kofficienterna = 0, det så kallade *nollpolynomet*. För detta definerar man att graden är $-\infty$.[4] Om p är nollpolynomet skriver vi $p = 0$.[5]

Divisionsalgoritmen

Det finns en del analogier mellan polynomen och heltalen: Liksom summa, differens och produkt av två heltal alltid ger ett nytt heltal så ger dessa räknesätt använda på polynom alltid ett polynom som resultat.

Exempel 4.3:

Med p_2 och p_4 som i exempel 4.1:

$$p_2(x) + p_4(x) = \left(e\,x^2 + \frac{1}{\pi}x^3\right) + (x^2+2) = \frac{1}{\pi}x^3 + (e+1)x^2 + 2,$$

---

4 Definitionen kan verka egendomlig. Orsaken till den är bl a att grad $(p\cdot q)$ = grad p + grad q då gäller för alla polynom p och q, inklusive nollpolynomet. ”Aritmetiken” för $-\infty$-tecknet, som ju inte är något tal, ges av $-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$ och $-\infty < n$ för alla heltal n.

5 Observera att man skiljer på ”$p = 0$”, som alltså utsäger att p är nollpolynomet, och ”$p(x) = 0$”, som är ett sätt att uttrycka en ekvation: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

$$p_2(x) - p_4(x) = \left(e\,x^2 + \frac{1}{\pi}x^3\right) - (x^2+2) = \frac{1}{\pi}x^3 + (e-1)x^2 - 2,$$

$$p_2(x)\cdot p_4(x) = \left(e\,x^2 + \frac{1}{\pi}x^3\right)\cdot(x^2+2) = \frac{1}{\pi}x^5 + e\,x^4 + \frac{2}{\pi}x^3 + 2e\,x^2.$$ ■

Kvoten mellan två polynom är däremot i allmänhet inte något polynom, liksom kvoten mellan två heltal i allmänhet inte är ett heltal. När kvoten ”inte går jämnt ut” kan man dock ”dividera med rest”:

$$\frac{29}{12} = 2 + \frac{5}{12}, \text{ eller, som vi hellre skriver, } 29 = 2\cdot 12 + 5.$$

Talet 2 kallas som bekant *kvot* och 5 *rest*. Denna rest är alltid mindre än bråkets nämnare.
För polynom har man en direkt motsvarighet till detta:

> *Sats 4.1* (Division med rest)
>
> Om p och q, $q \neq 0$, så finns ett polynom k och ett polynom r sådana att
> $p(x) = k(x)\,q(x) + r(x)$ och grad $r <$ grad q.

Exempel 4.2:

Låt $p(x) = 3x^5 + 7x^2 + 1$ och $q(x) = x^2 - 1$. Vi vill bestämma polynom $k(x)$ och $r(x)$, grad $r < 2$, så att

$$3x^5 + 7x^2 + 1 = k(x)(x^2-1) + r(x).$$

1° Anpassa först ett monom cx^α så att polynomet $cx^\alpha q(x) = cx^\alpha(x^2-1)$ får samma ledande term som $p(x)$, dvs $3x^5$: Tydligen är $cx^\alpha = 3x^3$.

2° Bilda differensen $p_1(x) = p(x) - cx^\alpha q(x) = 3x^5 + 7x^2 + 1 - 3x^3(x^2-1) = 3x^3 + 7x^2 + 1$.
Nödvändigtvis är då grad $p_1 <$ grad p.

3° Upprepa förfarandet under punkterna 1° och 2° med p_1 i p:s roll: Man får som monom $3x$ och $p_2(x) = (3x^3 + 7x^2 + 1) - 3x(x^2-1) = 7x^2 + 3x + 1$ och grad $p_2 <$ grad p_1.

4° Upprepa ytterligare en gång med p_2 i p:s roll: Monomet blir konstanten 7 och
$p_3(x) = (7x^2 + 3x + 1) - 7(x^2-1) = 3x + 8$ och grad $p_3 <$ grad p_1.
Nu är grad $p_3 = 1 <$ grad q, varför vi avbryter proceduren och samlar ihop resultatet:

5° $p(x) - (3x^5 + 3x + 7)(x^2-1) = 3x + 8 \;\Leftrightarrow\; p(x) = (3x^5 + 3x + 7)\,q(x) + (3x + 8)$,
dvs kvoten = $3x^5 + 3x + 7$ och resten = $3x + 8$. ■

Vid handräkning samordnar man lämpligen kalkyler av detta slag i en ”divisionstrappa”, exempelvis så här:

$$\begin{array}{rl}
 & 3x^3 + 3x + 7 \quad \leftarrow \text{kvot} \\
\text{dividend (täljare)} \rightarrow & 3x^5 + 7x^2 + 1 \;\big|\; x^2 - 1 \quad \leftarrow \text{divisor (nämnare)} \\
 & \underline{3x^5 - 3x^3} \\
 & 3x^3 + 7x^2 + 1 \\
 & \underline{3x^3 - 3x} \\
 & 7x^2 + 3x + 1 \\
 & \underline{7x^2 \qquad\quad - 7} \\
 & 3x + 8 \quad \leftarrow \text{rest}
\end{array}$$

Övningar: 4.1 – 2.

Nollställen. Faktorsatsen

Det råder ett nära samband mellan ett polynoms nollställen, dvs rötterna till ekvationen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

och möjligheterna att dela upp polynomet i faktorer.

Exempel 4.4:

Polynomet $x^4 - 1$ i ekvationen $x^4 - 1 = 0$ kan delas upp i faktorer:
$x^4 - 1 = [\text{Konjugatregeln}] = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$.
Eftersom en produkt är = 0 om och endast om någon av dess faktorer är = 0, så avläser man här att de fyra talen ±1 och ±i är rötter till ekvationen och att det inte finns fler rötter än dessa. Är man bara intresserad av reella rötter, så framgår det att ±1 är de enda lösningarna till ekvationen. ■

Generellt gäller att om polynomet har ett 1:a-gradspolynom, $x - c$, som faktor: $p(x) = (x-c)k(x)$,
så är $p(c) = 0$, dvs c är en rot till ekvationen $p(x) = 0$.
Inte lika självklart är att omvänt varje rot till ekvationen svarar mot en faktoruppdelning av detta slag:

> *Sats 4.2* (Faktorsatsen)
>
> Talet c är en rot till ekvationen
>
> $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
>
> om och endast om $p(x) = (x-c)k(x)$ för något polynom $k(x)$.

Faktorsatsen kan användas för att reducera graden hos polynomekvationer där man av någon anledning känner till någon rot.

Exempel 4.5:

Problem: Lös ekvationen $x^3 - 9x^2 + 13x - 5 = 0$.

Lösning: Koefficienternas summa råkar vara = 0, detta innebär att $x = 1$ är en rot. Polynomet $x - 1$ måste alltså gå jämnt upp i $x^3 - 9x^2 + 13x - 5$. Division (genomför gärna det!) ger $x^3 - 9x^2 + 13x - 5 = (x-1)(x^2 - 8x + 5)$. Ekvationens övriga rötter satisfierar därför andragradsekvationen $x^2 - 8x + 5 = 0$.
Denna har lösningarna $x = 4 \pm \sqrt{16-5} = 4 \pm \sqrt{11}$.

Svar: 1 och $4 \pm \sqrt{11}$. ■

En viktig konsekvens av faktorsatsen är att en polynomekvation

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\; p \neq 0,$$

aldrig har fler olika rötter än polynomets gradtal. Om nämligen $c_1, \ldots c_k$ är k olika rötter till ekvationen, så måste enligt faktorsatsen produkten

$$(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdot\;\ldots\;\cdot(x-c_k),$$

som ju är ett polynom av grad k, gå jämnt upp i p, varför $k \leq$ grad p.

Exempel 4.6:

Problem: Bestäm ett polynom p av så låg grad som möjligt så att $p(1) = p(2) = 0$ och $p(3) = 1$.

Lösning: Polynomet har nollställena 1 och 2 och måste alltså ha $x - 1$ och $x - 2$ som faktorer, dvs $p(x) = (x-1)(x-2$
Sättes här $x = 3$ får man $1 = p(3) = 1\cdot 2\cdot q(3)$, dvs $q(3) = \frac{1}{2}$. Lägsta möjliga gradtal får man tydligen då $q(x)$ sätts till konstanten 1/2. Alltså

$$p(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$ ■

Exempel 4.7:

Problem: Polynomet $p(x) = x$ antar värdena 0, 1, 2, … , 1000 då x = 0 ,1, 2, … , 1000. Finns det något annat polynom av grad ≤ 1000 som har denna egenskap?

Lösning: Svaret är nej, ty om $q(x)$ skulle vara ett sådant polynom så skulle differensen $d(x) = p(x) - q(x)$ vara ett polynom av grad ≤ 1000 men med 1001 olika nollställen och detta är en omöjlighet om d inte är nollpolynomet. ■

Resonemanget ovan ger inte någon anvisning om det exakta antalet olika rötter. Som exempel visar kan detta antal variera:

Exempel 4.8:

Följande ekvationer av grad 3 kan alltså ha maximalt tre olika rötter:

$0 = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, har verkligen tre rötter, 0 och ±1,

$0 = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, har bara två rötter, 0 och 1,

$0 = x^3$, har bara en rot, 0. ■

Polynomen i exemplen 4.5 och 4.6 kunde delas upp i faktorer på enkla vis och därigenom kunde man bestämma rötterna till motsvarande ekvationer. Vanligen är situationen den omvända; någon uppenbar faktoruppdelning finns inte, däremot kan man bestämma en sådan om man kan beräkna polynomets nollställen.

Exempel 4.9:

Dela upp $p(x) = x^4 + 4$ i (komplexa) faktorer så långt möjligt.

Lösning: Vi löser ekvationen $z^4 + 4 = 0$ fullständigt. Eftersom ekvationen är binomisk kan den lösas med tekniken beskriven i avsnitt K4.4:

$$z = re^{i\phi} \qquad r^4e^{4i\phi} = -4 = 4e^{i\pi} \qquad r = \sqrt{2} \text{ och } \phi = \pi/4 + k\pi/2,\ k = 0,\ \pm1,\ 2.$$

Rötterna är alltså

$$z = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + k\pi/2)} = \sqrt{2} \cdot (\pm 1/\sqrt{2} \pm i\, 1/\sqrt{2}) = \pm 1 \pm i.$$

Detta innebär att polynomet $q(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$ måste gå jämt upp i $x^4 + 4$. Kvoten måste i det här fallet vara en konstant, detta eftersom p och q har samma grad. Eftersom koefficienterna för x^4-termerna är lika för p och q så är den konstanten = 1. Uppdelningen av p är alltså

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i).$$

Är man enbart intresserad av uppdelningar i faktorer med reella koefficienter, så kan räkningarna ovan ändå lösa problemet: Några reella förstagradsfaktorer finns inte, ty polynomet har inga reella nollställen. Multiplikation av 1:a och 2:a respektive 3:e och 4:e faktorn ger dock polynom med reella koefficienter,

$$x^2 - 2x + 2 \text{ och } x^2 + 2x + 2, \text{ alltså}$$

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$ ■

Övningar: 4.13c – f.

Algebrans fundamentalsats

I avsnitten K4.4 och K4.5 beskrevs generella metoder för att lösa andragradsekvationer och binomiska ekvationer. Det ligger naturligtvis mycket nära till hands att fråga efter metoder för att ange lösningarna för godtyckliga polynomekvationer. Hur svaret på den frågan ser ut, beror mycket på vad man menar med ordet ”ange”. För ekvationer av grad 3 och 4 finns lösningsförfaranden av liknande slag som för andragradsekvationer. Lösningarna uttrycks då som kombinationer av ekvationens koefficienter med de fyra räknesätten och med rotutdragningar (= lösning av binomiska ekvationer). Vill man kunna ange lösningar på detta sätt för ekvationer av ännu högre grad kräver man dock för mycket: För ekvationer av grad ≥ 5 finns inga sådana förfaranden!

Detta innebär *inte* att sådana ekvationer saknar lösningar, men *om* lösningar finns så kan de inte anges på detta speciella vis. Med helt andra, och rätt komplicerade, metoder kan man bevisa att alla polynomekvationer av grad ≥ 1 faktiskt alltid har komplexa rötter:

Sats 4.3 (Algebrans fundamentalsats)

Varje polynomekvation,

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

av grad ≥ 1 har (minst) en komplex rot.

Polynomet i exempel 4.6, $x^4 + 4$, kunde delas upp i fyra komplexa faktorer. Kombinerar man fundamentalsatsen och faktorsatsen förstår man att detta inte är någon tillfällighet:

Om ett polynom delats upp i komplexa faktorer så långt som det är möjligt, så kan ingen av dessa faktorer vara av grad ≥ 2. En sådan faktor skulle ju i så fall, enligt fundamentalsatsen, ha ett nollställe c och sedan, på grund av faktorsatsen, kunna delas upp ytterligare med en faktor $x - c$.

Man har alltså:

Sats 4.4 (Om uppdelning av polynom i komplexa faktorer)

Varje polynom

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1,$$

kan delas upp i n komplexa 1:a-gradsfaktorer

$$p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n).$$

Uppdelningarna av polynomen i exempel 4.5 är just av detta slag.

Observera att talen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ behöver inte behöver vara olika. Man kan dock alltid samla ihop faktorerna enligt

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

där $x_1, x_2, \ldots x_k$ alla är olika och $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ är heltal ≥ 1. Man säger i så fall att roten x_1 har *multipliciteten* α_1, x_2 har *multipliciteten* α_2, osv, eller mera precist:

Definition: (Multiplicitet hos rot)

En rot x_0 till en ekvation $p(x) = 0$ sägs ha *multipliciteten* α om

$$p(x) = (x - x_0)^{\alpha} q(x),$$

där q är ett polynom med $q(x_0) \neq 0$.

För fallen α = 2 och 3 säger man också *dubbelrot* och *trippelrot*. Rötter av multiplicitet 1 sägs vara *enkla*.

Exempel 4.10:

För ekvationerna $x^3 - x = 0$, $x^3 - x^2 = 0$, respektive $x^3 = 0$ har man

$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$: tre enkla rötter, 0 och ±1,

$x^3 - x^2 = x^2(x-1) = (x-0)^2(x-1)$: en dubbelrot 0 och en enkelrot 1,

$x^3 = (x-0)^3$: en trippelrot 0. ■

Sammanfattningsvis:

Sats 4.5 (Om komplexa rötter till polynomekvationer)

Varje polynomekvation $p(x) = 0$, grad $p = n \geq 0$,
har n st komplexa rötter, om dessa räknas med sin multiplicitet.

Om n:te-gradsekvationen $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ har rötterna $x_1, x_2, \ldots, x_n$, så måste enligt satsen 4.4 om faktoruppdelningar, (sätt $a_n = 1$):

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Speciellt för andragradsekvationer har man att

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Man har alltså följande samband mellan ekvationens koefficienter och rötterna:

$$a_1 = -(x_1 + x_2) \text{ och } a_0 = x_1x_2.$$

Exempel 4.11:

Problem: Omkretsen hos en rektangel är 8 dm, dess area 2 dm^2. Hur långa är rektangelns sidor?

Lösning: Om sidorna är x_1 och x_2 så har man att arean $= x_1x_2 = 2$ och omkretsen $= 2(x_1 + x_2) = 8$. Talen x_1 och x_2 måste därför vara lösningarna till andragradsekvationen $x^2 + a_1x + a_0 = 0$ med $a_1 = -4$ och $a_2 = 2$. De är följaktligen $x_{1,\,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 2}$.

Svar: $2 \pm \sqrt{2}$ dm. ■

Om man på liknande sätt identifierar koefficienterna i båda leden på faktoruppdelningen av n:te-gradspolynomet ovan, så får man:

Sats 4.6 (Om samband mellan rötter och koefficienter)

För koefficienterna till n:te-gradsekvationen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

gäller att rötternas summa $= -a_{n-1}$ och
rötternas produkt $= (-1)^n a_0$.

Övningar: 4.3 – 7.

Polynom med reella koefficienter

De allra flesta storheter man studerar i olika tillämpningar av matematik, som i exempelvis fysik och kemi, beskrivs med reella tal. Om man i sådana sammanhang behöver använda sig av räkning med polynom är dessa naturligt nog försedda med reella koefficienter. Komplexa faktoruppdelningar är i sådana sammanhang av begränsat intresse – man vill ha reella faktorer. I exempel 4.6 såg vi att man via räkningar med komplexa tal kunde räkna fram en reell faktoruppdelning av ett reellt polynom: $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.
Inte heller detta är inte någon tillfällighet. Vi skall se att det alltid finns en uppdelning av reella polynom i reella faktorer av grad 1 eller 2.

Först en iakttaglse som också har ett eget intresse:

Sats 4.7 (Om konjugerade rötter till reella ekvationer)

Om det komplexa talet z_0 är en rot till ekvationen

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

där koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ alla är reella,
så är det konjugerade talet $\overline{z_0}$ också en rot till ekvationen.

De icke-reella rötterna till en sådan ekvation förekommer alltså bara som konjugerade par. (Ex:: Rötterna till $x^2 + 1 = 0$ är $\pm$i, till $x^4 + 4 = 0$ är $\pm 1 \pm$ i.)

Bevis för sats 4.7:

Låt z_o vara en rot till ekvationen. Detta innebär att

$$a_nz_o^n + a_{n-1}z_o^{n-1} + \ldots + a_1z_o + a_o = 0.$$

Konjugeras denna likhet (se avsnitt K4.2.4) ger

$$\overline{a_n}\overline{z_o}^n + \overline{a_{n-1}}\overline{z_o}^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}\overline{z_o} + \overline{a_o} = 0.$$

Eftersom polynomets koefficienter är reella så är $\overline{a_o} = a_o, \overline{a_1} = a_1, \ldots, \overline{a_n} = a_n$,

varför $$a_n\overline{z_o}^n + a_{n-1}\overline{z_o}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z_o} + a_o = 0,$$

dvs $\overline{z_o}$ är en rot till ekvationen. ■

Exempel 4.12:

Problem: Bestäm de reella konstanterna a och b så att $x =$ i är en rot till ekvationen

$$x^4 + 7x^3 - 2x^2 + bx + a = 0$$

och lös sedan ekvationen.

Lösning: Sättes $x =$ i får man $1 - 7\mathrm{i} + 2 + b\,\mathrm{i} + a = 0$, dvs $a = -3$ och $b = 7$.
Ekvationen $x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 7x - 3 = 0$ har reella koefficienter och en rot $x =$ i. Därmed är också $x = -$i en rot och polynomet $(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = x^2 + 1$ måste vara en faktor i ekvationens vänsterled. Division (t ex med divisionsalgoritmen) ger

$$\frac{x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 7x - 3}{x^2 + 1} = x^2 + 7x - 3.$$

Ekvationens övriga två rötter är nollställena till detta andragradspolynom:

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 3}\,.$$

Svar: $a = -3$, $b = 7$. Rötterna är $\pm$ i och $-\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{61}}{2}$. ■

Reella polynom $p(x)$ som har ett icke-reellt nollställe $z_0 = a + \mathrm{i}b$, $b \neq 0$ har alltså också nollstället $\overline{z_0} = a - \mathrm{i}b$. Detta innebär att både $(x - a - \mathrm{i}b)$ och $(x - a + \mathrm{i}b)$ måste vara två olika faktorer till $p(x)$:

$$p(x) = (x - a - \mathrm{i}b)(x - a + \mathrm{i}b)\,q(x),\ q \text{ ett polynom.}$$

Men $(x - a - \mathrm{i}b)(x - a + \mathrm{i}b) = (x - a)^2 - (\mathrm{i}b)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ är ett polynom med reella koffecienter.
Det komplexa rotparet $a \pm \mathrm{i}b$ svarar alltså mot en reell faktor av grad två. Eftersom reella rötter svarar mot reella faktorer av grad 1, så har vi

Sats 4.8 (Om uppdelning av reella polynom i reella faktorer)

Varje reellt polynom av grad ≥ 1 kan delas upp i reella faktorer
av grad 1 eller 2.

Övningar: 4.8 – 9.

Om ekvationslösning

Trots att det inte finns några exakta lösningsförfaranden för godtyckliga polynomekvationer, så kan vissa av dem ändå lösas med rät enkla metoder. Hit hör andragradsekvationerna och de binomiska ekvationerna. Ett annat fall är då man känner någon eller några rötter till ekvationen. (Exemplen 4.5 och 4.11 är av detta slag.) Enligt faktorsatsen kan man då reducera problemet till ett av lägre grad som sedan kanske kan lösas. Den metoden bygger alltså på, att man på något sätt skaffat sig kännedom om någon av rötterna. En möjlighet är förstås att man prövar sig fram – man ”gissar rötter”. Oddsen att lyckas är naturligtvis i allmänhet rätt dåliga – det finns ju oändligt många olika alternativ att välja på men bara ändligt många rötter. För ekvationer med koefficienter som är *heltal* kan man dock mera systematiskt leta sig fram till eventuella *rationella* rötter:[6]

Exempel 4.13:

Problem: Lös ekvationen $7x^3 + 8x^2 + 22x + 3 = 0$.

Lösning: Anta att ekvationen har en lösning av typen $x = r/s$, där r och s är heltal och att bråket är förkortat så långt som möjligt. I så fall är

$$7\left(\frac{r}{s}\right)^3 + 8\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 22\,\frac{r}{s} + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \overbrace{7r^3 + \underbrace{8r^2s + 22rs^2}_{}}^{\text{Heltal delbart med } r.}\!\!\!\underbrace{+ 3s^3}_{\text{Heltal delbart med } s.} = 0.$$

Detta innebär att r måste gå jämnt upp i $3s^3$ och s i $7r^3$. Eftersom r och s saknar gemensamma faktorer $\neq \pm 1$, så måste heltalet r måste gå jämnt upp i 3 och heltalet s i 7. Då finns för r:s del bara möjligheterna $r = \pm 1$ och ± 3 och för s’ del $s = \pm 1$ och ± 7.

Om ekvationen alltså överhuvudtaget har några rationella rötter så finns de bland de åtta talen ± 1, ± 3, $\pm 1/7$ och $\pm 3/7$.

De positiva kandidaterna kan man omedelbart gallra bort eftersom vänsterledet i ekvationen är positivt för positiva x. Återstår -1, -3, $-1/7$ och $-3/7$. Prövas dessa finner man att $-1/7$ faktiskt är en rot.

Divideras polynomet med $x + 1/7$ (eller bättre $7x + 1$) får man

$$7x^3 + 8x^2 + 22x + 3 = (7x + 1)(x^2 + x + 3).$$

Ekvationens övriga rötter är nollställena till $x^2 + x + 3$, dvs. $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3}$.

Svar: $-\frac{1}{7}$ och $\frac{-1 \pm \sqrt{11}\,\mathrm{i}}{2}$. ■

Med samma sorts resonemang som i exemplet ovan visar man:

Sats 4.9: (Om rationella rötter)

Om koefficienterna till ekvationen

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

är *heltal* och r/s, r och s heltal utan gemensam delare $\neq \pm 1$,
är en rationell rot till ekvationen, så går r jämnt upp i a_0 och s i a_n.

[6] Rationellt tal $\Leftrightarrow$ Tal som är kvoten mellan två heltal.

Exempel 4.14:

Problem: Visa att polynomet $7x^3 + 8x^2 + 22x + 2$ inte går att dela upp i polynomfaktorer vars koefficienter är hela tal.

Lösning: Om polynomet går att dela upp i faktorer så måste (minst) en av dem ha graden 1. Om den faktorns koefficienter är heltal så är dess nollställe ett rationellt tal. Om vi kan visa att polynomet saknar rationella nollställen så har vi löst problemet:

Anta därför $x = r/s$ (r och s heltal utan gemensamma delare $\neq \pm 1$) är en rot till $7x^3 + 8x^2 + 22x + 2 = 0$. Då måste enligt satsen om rationella rötter talet r gå jämnt upp i 2, dvs vara någon av de fyra talen ± 1, ± 2. Vidare måste talet s gå jämnt upp i 7, dvs de enda möjligheterna är att $x = \pm 1, \pm 2, \pm 1/7$ eller $\pm 2/7$. Prövning av dessa åtta tal visar att ingen av dem är nollställe till polynomet. Rationella nollställen saknas alltså. ■

Även annan information om rötterna kan ibland vara till hjälp för att få fram faktoruppdelningar. Några exempel;

Exempel 4.15:

Problem: Ekvationen $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 12x + 15 = 0$ har en rot som ligger på den imaginära axeln. Lös ekvationen.

Lösning: Om en rot är $x = \mathrm{i}y$ där y är reellt, så måste gälla

$(\mathrm{i}y)^4 + 4(\mathrm{i}y)^3 + 8(\mathrm{i}y)^2 + 12\cdot \mathrm{i}y + 15 = 0 \Leftrightarrow (y^4 - 8y^2 + 15) + \mathrm{i}(-4y^3 + 12y) = 0$,

dvs $\begin{cases} y^4 - 8y^2 + 15 = 0 & \ldots [1], \textit{ och} \\ -4y^3 + 12y = 0 & \ldots [2] \end{cases}$

Här är [2] $\Leftrightarrow y(y^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ eller $y = \pm\sqrt{3}$. Av dessa satisfierar $y = \pm\sqrt{3}$ även ekvationen [1].

Den givna ekvationen har alltså $x = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ som rötter. Detta innebär att $(x - \mathrm{i}\sqrt{3})(x + \mathrm{i}\sqrt{3}) = x^2 + 3$ måste vara en faktor i den givna ekvationens vänsterled.

Division ger $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 12x + 15 = (x^2 + 3)(x^2 + 4x + 5)$ och de övriga båda rötterna $x = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm \mathrm{i}$.

Svar: $\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$ och $-2 \pm \mathrm{i}$. ■

Exempel 4.16:

Problem: Ekvationen $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 12x + 15 = 0$ har en rot med belopp $\sqrt{3}$. Lös ekvationen.

Lösning: Roten med belopp $\sqrt{3}$måste vara icke-reell eftersom varken $\sqrt{3}$ eller $-\sqrt{3}$ löser ekvationen. Eftersom ekvationen har reella koefficienter måste det finnas två konjugerade lösningar $x = a \pm \mathrm{i}\,b$ (sats 4.7), med $|x|^2 = a^2 + b^2 = 3$. Polynomet i den givna ekvationen måste alltså ha en faktor

$$(x - a - \mathrm{i}\,b)(x - a + \mathrm{i}\,b) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + 3.$$

Ansätter man $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 12x + 15 = (x^2 - 2ax + 3)(x^2 + Cx + D) =$
$= x^4 + (C - 2a)x^3 + (D - 2aC + 3)x^2 + (3C - 2aD)x + 3D$, vilket visar att följande fyra villkor alla måste uppfyllas:

$$\begin{cases} C - 2a = 4 \\ D - 2aC + 3 = 8 \\ 3C - 2aD = 12 \\ 3D = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C - 2a = 4 \\ aC = 0 \\ 3C - 10a = 12 \\ D = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ C = 4 \\ D = 5 \end{cases}$$

Alltså $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 6x + 15 = (x^2 + 3)(x^2 + 4x + 5)$, vilket som i det föregående exemplet ger:

Svar: $\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$ och $-2 \pm \mathrm{i}$. ■

Övningar: 4.10 – 12.

Övningar:

4.1. Bestäm graden hos följande polynom:

a. $(3x^2 - 2x) - (2x - 3x^2)$ b. $x(3x^2 + 1)^{10}(x + 7)^{19}$

c. $x(x - 3)^2 - (x - 2)^3$

4.2 Bestäm kvot och rest för divisionerna:

a. $\dfrac{x^2 - 15x + 56}{x - 7}$ b. $\dfrac{x^2 - 15x + 56}{x - 6}$

c. $\dfrac{x - 7}{x^2 - 15x + 56}$ d. $\dfrac{x^4}{x^3 + 1}$

e. $\dfrac{7x^4 - 46x^3 + 22x^2}{x^2 - 7x + 5}$

4.3 Alla rötterna till följande andragradsekvationer är heltal. Ange dem utan omfattande räkningar:

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$ b. $x^2 + x - 6 = 0$

c. $x^2 - 7x + 6 = 0$ d. $x^2 + 18x + 77 = 0$

e. $x^2 - 99x - 202 = 0$

4.4 Ekvationen $3x^3 - 4x^2 + 17x + 14 = 0$ har en rot $x = -2/3$. Lös ekvationen.

4.5 Ekvationen $x^3 + \sqrt{3}x^2 - 9x + 3\sqrt{3} = 0$ har en rot $x = \sqrt{3}$. Lös ekvationen.

4.6 Bestäm konstanten c så att ekvationen $x^3 - 39x + c = 0$ får en rot $x = 2$ och lös sedan ekvationen.

4.7 Bestäm konstanten c så att ekvationen $x^3 - (7 - i)x^2 + (2 - 7i)x + c = 0$ får en rot $x = i$ och lös sedan ekvationen.

4.8 Bestäm ett reellt polynom ≠ nollpolynomet av så lågt gradtal som möjligt som har nollställena 1, i, 3 och – i.

4.9 Ekvationen $x^4 - 19x^2 + 18x + 70 = 0$ har en rot $x = 3 + i$. Lös ekvationen.

4.10 För en av rötterna x_1 till ekvationen $x^4 - 9x^2 - 36x - 8 = 0$ är $\arg x_1 = 3\pi/4$. Lös ekvationen.

4.11 Ekvationen $5x^4 + 19x^3 - 15x^2 + 13x + 10 = 0$ har en rot på enhetscirkeln. Lös ekvationen.

4.12 Somliga av rötterna till följande ekvationer är rationella. Lös ekvationerna:

a. $x^3 - 19x + 30 = 0$ b. $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

c. $5x^3 - 19x^2 + x + 1 = 0$ d. $3x^4 + 5x^3 - 23x^2 + x + 2 = 0$

4.13 Dela upp följande polynom i reella faktorer så långt möjligt:

a. $x^3 + 5x^2 + x - 7$ b. $x^3 + 5x^2 + 5x - 11$

c. $x^3 + 8$ d. $x^3 + 2$

e. $x^4 + 1$ f. $x^6 - 1$

g. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ h. $(x^3 + 1)^2 + (x^3 - 1)^2$

4.14 Visa att om x_1, x_2 och x_3 är rötterna till $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, så är $a_0 = -x_1x_2x_3$, $a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ och $a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3)$.

4.15 Ett rätblock har volymen 1 dm^3, summan av dess sex sidoareor är 10 dm^2 och summan av dess tolv kantlängder 20 dm. Bestäm rätblockets längd, bredd och höjd. (*Ledning*: Använd resultatet i föregående uppgift.)

* **4.16** Generalisera resultatet i uppgift 4.14 och i sats 4.6: Visa att om $x_1, x_2 \ldots x_n$ är de n rötterna till ekvationen $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, så är

$a_0 = (-1)^n x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$,

$a_1 = (-1)^{n-1}(x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})$,

………

$a_k = (-1)^{n-k}$(summan av alla de produkter man får då $(n - k)$ st av rötterna multipliceras ihop),

………

$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

5. Derivator

Övningar

5.1 Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $x^7 - 5x^3 + 1$	b. $(x^2 - x)^4$	c. $(x+1)^3(1-x)^4$
d. $\dfrac{x^2+1}{x+1}$	e. $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$	f. $\sqrt{x}$
g. $\sqrt[3]{x^2}$	h. $\sqrt{x^2 - 2x}$	i. $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$
j. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$	k. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	l. $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
m. e^{x^2+x}	n. $(x^2-x)e^{-x}$	o. $\ln\sqrt{x}$
p. $\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$		q. $\ln\left(x + \dfrac{a}{2} + \sqrt{x^2 + ax + b}\right)$
r. $\sin^2\dfrac{1}{x}$	s. $\dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$	t. $e^{\sin x^2}$
u. $\ln\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$	v. $\arcsin x^2$	w. $\arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$
x. $\arctan\sqrt{x}$	y. $\arctan\dfrac{1+x}{1-x} - \arctan x$	
z. x^x	å. $x^{\tan x}$	ä. $\log_x e$
ö. $x^{\frac{1}{\ln x}}$	ü. $\cosh^2 x - \sinh^2 x$	

Allmänna deriveringsregler

Aritmetiska regler

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, c konstant

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Sammansättning

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivator för elementära funktioner

$D\,c$	$= 0$, c konstant	$D\ \log_a \lvert x\rvert$	$= (\log_a e)/x$
$D\,x^\alpha$	$= \alpha x^{\alpha-1}$, α konstant	$D \ln \lvert x\rvert$	$= 1/x$
$D\,a^x$	$= (\ln a)\, a^x$, a konstant		
$D\,e^x$	$= e^x$	$D \arcsin x$	$= 1/\sqrt{1-x^2}$
$D \sin x$	$= \cos x$	$D \arccos x$	$= -1/\sqrt{1-x^2}$
$D \cos x$	$= -\sin x$	$D \arctan x$	$= 1/(1+x^2)$
$D \tan x$	$= 1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$	$D\,\mathrm{arccot}\, x$	$= -1/(1+x^2)$
$D \cot x$	$= -1 - \cot^2 x = -1/\sin^2 x$		

6. Differentialekvationer

Övningar

6.1 Bestäm de allmänna lösningarna till följande differentialekvationer:

a. $y' - 3y = 0$ b. $y'' - 2y' - 3y = 0$

c. $y'' - 2y' = 0$ d. $y'' - 4y' + 4y = 0$

e. $y'' + y = 0$ f. $y'' + 2y' + 5y = 0$

6.2 Ange den lösning till ekvationen

a) $y'' - y' - 30y = 0$ som uppfyller $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

b) $y'' + k^2 y = 0$ som uppfyller $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

6.3 Ange den allmänna lösningen till:

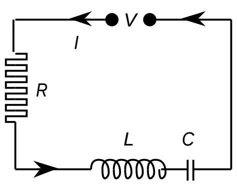
a) $y'' - y' - 30y = 30$ b) $y'' - y' - 30y = 6x + 1$

c) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 3x + 2$ d) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = x^3$

e) $y'' + y' = x^2$ f) $y'' + y' + y = 2e^{3x}$

6.4 Strömmen $I(t)$ i en elektrisk krets med resistans R, induktans L och kapacitans C och med en pålagd spänning $V(t)$ (t är tiden) uppfyller sambandet

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV}{dt}$$



Rita principskisser över möjliga förlopp för strömmen $I(t)$ om

a. V konstant, $R = 4$, $L = 1$, $C = 1/3$
b. V konstant, $R = 4$, $L = 1$, $C = 1/5$
c. V konstant, $R = 4$, $L = 2$, $C = 1/2$
d. V konstant, $R = 0$, $L = C = 1$
e. $V = \cos t$, $R = 4$, $L = 1$, $C = 1/3$
f. $V = \sin t$, $R = 0$, $L = C = 1$

I uppgifterna e. och f. kan förutsättas att lång tid förflutit sedan starten.

6.5 En vattenreservoir av volymen 1000 m^2 har blivit förorenad av ett visst ämne så att dettas koncentration är 0.02 volymsprocent. Den dagliga förbrukningen av vatten är 20 m^2 och det ersätts kontinuerligt med rent vatten. Det är också ständigt i rörelse, så man kan anta att koncentrationen är i stort sett konstant inom hela reservoiren vid samma tidpunkt. Efter hur många dagar har koncentrationen sjunkit till 10^{-5} %?

Linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ är konstanter.

Ekvationen är *homogen* $\Leftrightarrow$ $b(x) = 0$

Karakteristisk ekvation

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

Om lösningsmängden till homogena ekvationer

- Om $r = \rho$ är en reell rot till den karakteristiska ekvationen, så är funktionerna $y = Ae^{\rho x}$ (A godtycklig konstant) lösningar till motsvarande homogena differentialekvation.
- Om $r = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, är ett komplext rotpar till den karakteristiska ekvationen, så är funktionerna $y = e^{\alpha x}(B\cos\beta x + C\sin\beta x)$ (B och C godtyckliga konstanter) lösningar till motsvarande homogena differentialekvation.
- Godtyckliga summor av lösningar av ovannämnd typ är också lösningar.

Exempel: 1. Differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ som har rötterna 1 och -2.
Alltså är $y = Ae^x + Be^{-2x}$ lösning till differentialekvationen för godtyckliga konstanter A och B. ■

2. Differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 5 = 0$ som har rötterna $-1 \pm 2i$.
Alltså är $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ lösning till differentialekvationen för godtyckliga konstanter A och B. ■

3. Differentialekvationen $y''' + y'' - 2y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^3 + r^2 - 2 = 0$ som har rötterna 1 och $-1 \pm i$.
Alltså är $y = Ae^x + e^{-x}(B\cos x + C\sin x)$ lösning till differentialekvationen för godtyckliga konstanter A, B och C. ■

- Om roten respektive det komplexa rotparet har multiplicitet q, så gäller ovanstående med A, B resp C ersatta av godtyckliga polynom av grad $\leq q - 1$.

Exempel: 4. Differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ har den karakteristiska ekvationen

$r^2 + 2r + 1 = 0$ som har *dubbel*roten 1 (dvs multipliciteten = 2) .

Alltså är $y = (Ax + B)e^x$ lösning till differentialekvationen för godtyckliga konstanter A och B. ■

- Om samtliga rötters lösningar (enligt ovan) summeras får man differentialekvationens *allmänna* lösning. (De lösningar som ges i exemplen ovan är alla allmänna lösningar)

Om lösningar till inhomogena ekvationer

Allmän lösning	Den allmänna lösningen kan skrivas $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ där $y_p(x)$ är en lösning (partikulärlösning) till den inhomogena ekvationen och $y_h(x)$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation.
Partikulärlösningar	För ”enkla” högerled $b(x)$ kan en partikulärlösning beräknas via olika ansatsförfaranden:

Exempel: 5. (Högerledet konstant) I ekvationen $y'' + y' - 2y = 4$ ansättes konstanten $y = C$, vilket ger $-2C = 4$, dvs $C = -2$. En partikulärlösning är alltså $y_p = -2$ och den allmänna lösningen (enl ex 1): $y = -2 + Ae^x + Be^{-2x}$. ■

6. (Högerledet ett polynom) I ekvationen $y'' + y' - 2y = x + 4$ ansättes polynomet av grad 1, $y = Cx + D$, vilket ger $C - 2(Cx + D) = x + 4$, dvs $C = -1/2$ och $D = -9/4$.
En partikulärlösning är alltså $y_p = -1/2x - 9/4$ och den allmänna lösningen (enl ex 1):
$y = -1/2x - 9/4 + Ae^x + Be^{-2x}$. ■

7. (Högerledet en exponentialfunktion) I ekvationen $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ ansättes $y = Ce^{-x}$, vilket ger $(C - C - 2C)e^{-x} = e^{-x}$, dvs $C = -1/2$.
En partikulärlösning är alltså $y_p = -1/2e^{-x}$ och den allmänna lösningen (enl ex 1):
$y = -1/2e^{-x} + Ae^x + Be^{-2x}$. ■

8. (Högerledet en sin- eller cos-funktion). I ekvationen $y'' + y' - 2y = \cos x$ ansättes $y = C\cos x + D\sin x$, vilket ger $(-C + D - 2C)\cos x + (-D - C - 2D)\sin x = \cos x$, dvs $D - 3C = 1$, $-3D - C = 0$.
Lösning av detta ekvationssystem ger sedan $C = -3/10$ och $D = 1/10$.
En partikulärlösning är alltså $y_p = -3/10\cos x + 1/10\sin x$, och den allmänna lösningen (enl ex 1):
$y = -3/10\cos x + 1/10\sin x + Ae^x + Be^{-2x}$. ■

9. (”Resonans” — högerledet en av lösningarna till motsvarande homogena ekvation).
Högerledet till ekvationen $y'' + y' - 2y = e^x$ är enl ex 1 en lösning till motsvarande homogena ekvation. Ansats som i ex 7 fungerar då inte. Bestämning av en partikulärlösning kan göras enl följande:
Byt till ny obekant funktion z med substitutionen $y = ze^x$. Insättes detta i den givna ekvationen får man, eftersom $y' = (z' + z)e^x$ och $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$ den ”nya” differentialekvationen $z'' + 3z' = 1$ vilken har en partikulärlösning $z'_p = 1/3$, dvs $z_p = x/3$. Detta ger $y_p = xe^x/3$ och den allmänna lösningen
$y = xe^x/3 + Ae^x + Be^{-2x}$. ■

7. Integraler

Övningar

7.1 Bestäm de primitiva funktionerna till

a. $\frac{1}{x^3}$ b. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ c. $\sqrt[m]{x^n}$ d. $(x^3+1)^2$

e. $\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}$ f. $\frac{x^2-x+1}{x-2}$ (Utför divisionen eller sätt $x-2=t$)

g. e^{-nx} h. $\cos(3x+2)$ i. $\frac{1}{x^2+2x+2}$ (Kvadratkomplettera!)

j. $\frac{1}{\cos^2 3x}$ k. $\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ $\left[\text{Skriv om } \sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]$

l. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (Kvadratkomplettera!) m. $\frac{x}{1+x^2}$ n. $\arctan x$

7.2 Beräkna med hjälp av partialintegration

a. $\int x\cos x\,dx$ b. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ c. $\int \frac{\ln|x|}{x^2}dx$

d. $\int \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ e. $\int e^{2x}\sin x\,dx$ f. $\int(\cos 2x)\ln(\tan x)dx$

7.3 Beräkna med hjälp av lämpliga substitutioner

a. $\int e^{3x}dx$ b). $\int \frac{dx}{\cos^2(4x+3)}$ c. $\int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx$ d. $\int_0^2 \frac{x^2}{(x^3+2)^2}dx$

e. $\int \sqrt{x^6+1}\cdot x^5dx$ f. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ g. $\int \cos^2 x\sin x\,dx$ h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$

i. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ j. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$ k. $\int \frac{dx}{\cosh x}$ l. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

m. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Allmänna integrationsregler

Linearitet

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k \text{ konstant})$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Partiell integration

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Substitution

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \left[\begin{array}{ll} g(x)=t & \\ g'(x)dx=dt & \\ x=a & t=g(a) \\ x=b & t=g(b)\end{array}\right] = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Viktigare integraler (integrationskonstanten utelämnad)

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} = (\log_a e)\cdot a^x$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln\lvert g(x)\rvert$	$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$	$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
		$\sinh x$	$\cosh x$
		$\cosh x$	$\sinh x$

Viktigare substitutioner i integraler

Integraltyp	Substitution	
$\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x$	$x^n = t,$	$x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t$
Speciellt: $\int f(x^2)x\mathrm{d}x$	$x^2 = t,$	$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$
$\int f(e^x)\mathrm{d}x$	$e^x = t,$	$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
$\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$	$\sin x = t,$	$\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$
$\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$	$\cos x = t,$	$\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$
$\int f(\tan x)\,\mathrm{d}x$	$\tan x = t\,,$	$(x = \arctan t),\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

Observera att

$\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

$\sin x\cos x = \dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Exempel: (Partiell integration)

1. $$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\ln x}_{g}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F}\,\underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

2. $$\int \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{e^x}_{f}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{e^x}_{F} - \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{e^x}_{F}\,\mathrm{d}x = x\,e^x - e^x + C$$

3. $$\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f}\cdot\underbrace{\ln|x|}_{g}\,\mathrm{d}x = x\ln|x| - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln|x| - x + C$$

Exempel: (Substitution)

4. $$\int x\cdot e^{x^2}\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \underbrace{e^t}_{=e^{x^2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t}_{=x\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\cdot e^t + C = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2} + C$$

5. $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2-\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l|l} 2-\sqrt{x} = t & \mathrm{d}x = -2(2-t)\mathrm{d}t \\ & x = 0 \quad t = 2 \\ x = (2-t)^2 & x = 1 \quad t = 1 \end{array}\right] = \int_2^1 \frac{-2(2-t)}{t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int_2^1 \left(1 - \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = 2\Big[t - 2\ln|t|\Big]_2^1 = 2\,(1 - 2 + 2\ln 2) = 4\ln 2 - 2.$$

8. Serieutvecklingar

Övningar

8.1 Bestäm MacLaurinutvecklingarna av angiven ordning till följande funktioner:

a. $\dfrac{x^2 + 2x}{1+x}$, ordning 4 b. $\dfrac{1}{3+2x}$, ordning 2

c. $\ln(3 + 2x)$, ordning 3 d. $(1 - x^2)^2 + x^3 + 5x^7$, ordning 3

e. $\dfrac{1}{2 + x + x^2}$, ordning 2 f. $e^{x^2 - x}$, ordning 2

g. e^{x+1}, ordning 2 h. $e^{\sin x}$, ordning 2

8.2 En lina, som spänns mellan två stolpar, intar en form som anges av kurvan

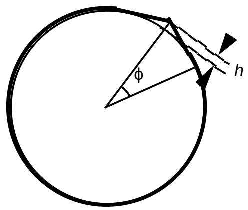
$$y = h + a\left(\cosh\frac{x}{a} - 1\right)$$

där y är linans höjd ovanför markpunkten x, $a = H/q$ där H är dragkraften i horisontell led och q linans vikt/längdenhet, h är linans lägsta höjd.

En viss lina väger 1 kg/m och tillåter en horisontell dragkraft på högst 1 ton. Gör en överslagsberäkning av hur långt avståndet mellan stolparna högst får vara om dessa är 10 m höga och linan inte får komma närmare marken än 8 m. Marken kan betraktas som plan.

8.3 Enligt relativitetsteorin är en partikels energi $E = mc^2$, där massan m är relaterad till vilomassan m_o och partikelns resp ljusets hastigheter, v resp c, enligt $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Rörelseenergin T definieras som skillnaden mellan total energi och viloenergi, dvs $T = mc^2 - m_oc^2$
Visa att den klassiska mekanikens uttryck för rörelseenergin, $\dfrac{m_ov^2}{2}$, stämmer bra för låga hastigheter och beräkna första ordningens relativistiska korrektion till rörelseenergin.



Uttöjda repets längd
= jordens omkrets + l
Vinkeln ϕ är liten.

6.4 Ett elastiskt rep tänkes spänt runt jorden. Repet lyfts på ett ställe h meter rakt upp och förlängs därvid med l meter. De delar av repet som då hänger mellan lyftpunkten och kontaktpunkterna med jordytan antas vara rätlinjiga. Bestäm konstanter K, a och b så att sambandet mellan h, l och jordradien R approximativt ges av $h \approx KR^al^b$.
Ge också ett närmevärde till h då förlängningen är 1 meter. (Jordens omkrets = 4 000 mil.)

MacLaurins formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + R_{n+1}(x) \text{ där}$$

$$R_{n+1}(x) = \int_1^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \mathrm{O}(x^{n+1}) \quad (\xi \text{ ett tal mellan 0 och } x)$$

Räkneregler för restermer

- $x^n = \mathrm{O}(x^n)$
- $f(x) = \mathrm{O}(x^n)$ och $m \le n \qquad f(x) = \mathrm{O}(x^m)$
- C konstant $\qquad C\cdot\mathrm{O}(x^n) = \mathrm{O}(C\cdot x^n) = \mathrm{O}(x^n)$
- $m \le n \qquad \mathrm{O}(x^n) \pm \mathrm{O}(x^m) = \mathrm{O}(x^m)$
- $\mathrm{O}(x^n)\cdot\mathrm{O}(x^m) = \mathrm{O}(x^{n+m})$
- $\dfrac{\mathrm{O}(x^n)}{x^m} = \mathrm{O}(x^{n-m})$
- $\left.\begin{array}{l} f(t) = \mathrm{O}(t^n), \\ t = g(x) = \mathrm{O}(x^m) \end{array}\right\} \qquad f(g(x)) = \mathrm{O}(x^{n\cdot m})$
- $\displaystyle\int_0^x \mathrm{O}(t^n)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}(x^{n+1})$
- $n > 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{O}(x^n) = 0$

Viktigare MacLaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathrm{O}(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)} + \mathrm{O}(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathrm{O}(x^{2n+1})$$

Exempel på utvecklingar:

1. $\dfrac{1+x}{1-x} = (1+x)\cdot\dfrac{1}{1-x} = \left[(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{O}(x^4)\right] = (1+x)(1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{O}(x^4)) =$
$= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{O}(x^4) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \mathrm{O}(x^4)$
vilket är MacLaurinutvecklingen av ordning 3. ■

2. $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \left[\begin{array}{l|l} t = x + x^2 = \mathrm{O}(x) & \\ (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \mathrm{O}(t^4) & \mathrm{O}(t^4) = \mathrm{O}(x^4) \end{array}\right] =$
$= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + \mathrm{O}(x^4) = \left[\begin{array}{l}\text{Termer av grad} \ge 4 \text{ behöver} \\ \text{ej skrivas ut jämte } \mathrm{O}(x^4)\end{array}\right] =$
$= 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 - x^3 + \mathrm{O}(x^4) = 1 - x + x^3 + \mathrm{O}(x^4)$ ■

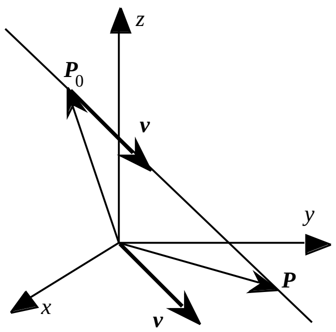
3. $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{2} = \mathrm{O}(x) \\ \mathrm{O}(t^4) = \mathrm{O}(x^4)\end{array}\right] = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{2} + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \mathrm{O}(x^4)\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + \mathrm{O}(x^4)$ ■

4. $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{O}(x^6)\right)} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \mathrm{O}(x^6) = \\ \quad = \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^4) = \mathrm{O}(x^2)\end{array}\right] = \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \mathrm{O}(t^3) =$
$= 1 + \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!} + \mathrm{O}(x^6)\right) + \left(\dfrac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^4)\right)^2 + \mathrm{O}(x^{2\cdot 3}) = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^4}{4} + \mathrm{O}(x^6) =$
$= 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \mathrm{O}(x^6)$ ■

5. $\tan x = \sin x \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \left[\begin{array}{l}\text{Utveckling av } \sin x \text{ och} \\ \text{av } 1/\cos x \text{ enligt ovan}\end{array}\right] = \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \mathrm{O}(x^7)\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \mathrm{O}(x^6)\right) =$
$= x + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\dfrac{5}{24} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!}\right)x^5 + \mathrm{O}(x^7) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \mathrm{O}(x^7)$ ■

9. Räta linjer och plan

Räta linjer



En rät linje i rummet är bestämd om man känner en punkt $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ på den och en vektor $\boldsymbol{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ parallell med den. Punkten $\boldsymbol{P} = (x, y, z)$ ligger då på linjen om och endast om vektorn

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}} = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

är paralell med $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$, dvs om och endast om $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}} = t\boldsymbol{v}$, där t är ett reellt tal. Vektorn $\boldsymbol{v}$ sägs vara en *riktningsvektor* till linjen och variabeln t kallas *parameter* och dess värde representerar olika ekvidistanta skalstreck på linjen.

Andra skrivsätt på detta är

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(a, b, c)$	Räta linjens (parameter)ekvation på vektorform.
$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$	Räta linjens parameterekvation på koordinatform.
Om a, b och $c \neq 0$ kan man också skriva detta: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$	Enpunktsformeln

Om en rät linje går genom de olika punkterna (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2) så är $\boldsymbol{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ en riktningsvektor till linjen.

Övningar:

9.1. Ange på vektorform ekvationen för den räta linjen genom $\boldsymbol{P}_0$ och med riktningsvektorn $\boldsymbol{v}$, då

a. $\boldsymbol{P}_0 = (3, 2, -1)$, $\boldsymbol{v} = (2, 3, 1)$,

b. $\boldsymbol{P}_0 = (2, 0, -1)$, $\boldsymbol{v} = (0, 0, 1)$,

c. $\boldsymbol{P}_0 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 1, 0)$.

9.2 Ange parameterekvationerna för de tre räta linjerna i uppgift 9.1 koordinatform och om möjligt också på enpunktsform.

9.3 Ange på vektorform ekvationen fär den räta linje som går igenom $\boldsymbol{P}_1$ och $\boldsymbol{P}_2$ där

a. $\boldsymbol{P}_1 = (1, 1, 1)$ och $\boldsymbol{P}_2 = (3, -2, 0)$,

b. $\boldsymbol{P}_1 = (2, 1, -3)$ och $\boldsymbol{P}_2 = (1, 1, 1)$.

9.4 Ange parameterekvationerna på koordinatform för linjerna i uppgift 9.3

9.5 Två personer bestämde ekvationer för en rät linje och fick olika svar. Det ena var $(x, y, z) = (3, 2, -3) + t\,(2, -4, -4)$ och det andra $(x, y, z) = (0, 8, 3) + t\,(-1, 2, 2)$. Måste någon ha fel?

Exempel 1:

En rät linjes ekvation lyder $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -5 \\ z = 6t \end{cases}$. Hur lyder ekvationen på vektorform?

Lösning: $(x, y, z) = (2 - t, -5, 6t) = (2, -5, 0) + (-t, 0, 6t) = (2, -5, 0) + t\,(-1, 0, 6)$.

Svar: $(x, y, z) = (2, -5, 0) + t\,(-1, 0, 6)$. ■

Övning:

9.6 Skriv på vektorform:

a. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ b. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 1}{3} = z$

Exempel 2:

Undersök om linjerna L_1: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ och L_2: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ skär varandra.

Lösning: Eftersom parametern t har olika betydelse i de olika linjernas ekvationer uppstår lätt förvirring. Vi byter därför beteckning på parametern i ekvationen för L_2: $\begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 - 2s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$.

Om linjerna skär varandra måste ett t-värde insatt i L_1:s ekvation ge samma koordinater som ett s-värde insatt i L_2:s ekvation, dvs det måste finnas en lösning till ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 3 - 2t = 4 + s \\ -1 + t = 3 - 2s \\ 2 - 3t = 2 + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t - s = 1 & \dots [1] \\ t + 2s = 4 & \dots [2] \\ -3t - 2s = 0 & \dots [3] \end{cases}$$

Detta linjära system har fler ekvationer än obekanta – det är ”överbestämt”. I regel har ett sådant inga lösningar. Redan två av ekvationerna ger normalt en lösning och att den då också skulle passa till den tredje är inte särskilt ”sannolikt”. (Detta avspeglar egentligen det faktum att om man på måfå tar två linjer i rummet så kommer de i allmänhet inte att skära varandra). För att avgöra hur det faktiskt förhåller sig i det här fallet tar vi (t ex) först ut ekvationerna [2] och [3] och adderar dem. Vi får $-2t = 4$, dvs $t = -2$. Efter insättning i [3] ger detta $s = 3$.

Prövning av dessa värden i ekvationen [1] ger VL $= -2\cdot(-2) - 3 = 1 =$ HL.

Linjerna skär alltså faktiskt varandra. Skärningspunkten får man om man sätter in de framräknade t- och s-värdena i L_1:s (eller L_2:s) ekvation. Den är $(7, -3, 8)$.

Svar: De skär varandra. ■

Övning:

9.7 Undersök om linjerna L_1 och L_2 skär varandra då

a. L_1: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ och L_2: $(x, y, z) = (1, 2, 2) + t\,(1, 1, -1)$,

b. L_1:och L_2: $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

c. L_1: $(x, y, z) = (1, 2, -1) + t\,(3, -2, 2)$ och L_2: $(x, y, z) = (2, 2, 0) + t\,(1, 2, 3)$.

Exempel 3:

Är linjerna L_1: $(x, y, z) = (3, 4, -3) + t\,(-1, 2, -3)$ och L_2: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = -3 + 6t \end{cases}$ parallella?

Lösning: L_1 har riktningsvektorn $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 2, -3)$ och L_2 riktningsvektorn $\boldsymbol{v}_2 = (2, -4, 6)$.

Vi frågar alltså: Är $\boldsymbol{v}_1 \,//\, \boldsymbol{v}_2$? $\Leftrightarrow$ Finns det något tal k så att $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$? $\Leftrightarrow$

$(-1, 2, -3) = k(2, -4, 6)$ $\Leftrightarrow$ Har systemet av ekvationer $\begin{cases} -1 = 2k \\ 2 = -4k \\ -3 = 6k \end{cases}$ någon lösning?

För att linjerna skall vara parallella fordras alltså att alla tre ekvationerna i systemet ger samma k-värde. Så är det här, $k = -1/2$ duger.

Svar: Linjerna är parallella.

Övningar:

9.8 Är linjerna $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = -z$ och $(x, y, z) = (3 - t, -1 + t, 2 + t)$ parallella eller ortogonala (dvs vinkelräta mot varandra)?

9.9 Bestäm konstanten a så att linjerna

$$\begin{cases} x = 3 + at \\ y = 2 - (a+1)t \\ z = (2a - 1)t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 8 - (a-2)t \\ y = 3 - at \\ z = -3 - 5at \end{cases}$$

a. är parallella, b. är ortogonala.

Exempel 4:

Undersök om linjerna L_1: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ och L_2: $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 6t \\ z = -1 + t \end{cases}$ ligger i samma plan.

Lösning: Två räta linjer ligger i samma plan om och endast om de skär varandra eller är parallella.

Är de parallella?

Deras riktningsvektorer är $\boldsymbol{v}_1 = (1, -3, 2)$ resp $\boldsymbol{v}_2 = (-2, 6, 1)$. Villkoret $\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$ svarar mot att $\begin{cases} 1 = -2k \\ -3 = 6k \\ 2 = k \end{cases}$, eftersom k-värdet 2 inte satisfierar de första två ekvationerna så finns inga lösningar till detta system, dvs linjerna är inte parallella.

Skär de varandra? (Jämför exempel 2)

I så fall måste det finnas t och s sådana att

$$\begin{cases} -1 + t = -3 - 2s \\ 2 - 3t = 6s \\ -2 + 2t = -1 + s \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t + 2s = -2 & \ldots [1] \\ -3t - 6s = -2 & \ldots [2] \\ 2t - s = 1 & \ldots [3] \end{cases}$$

Ekvationen [2] kan förenklas till $t + 2s = 2/3$ och strider alltså mot ekvation [1]. Systemet saknar alltså lösningar, dvs linjerna skär inte varandra.

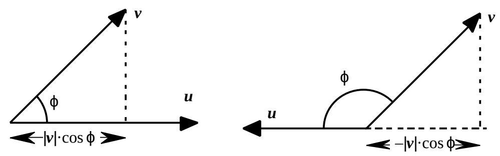
Svar: Linjerna ligger inte i samma plan. ■

Om skalär- och kryss- och trippelprodukt av vektorer:

Skalär produkt:

Definition: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\phi$, där ϕ är vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

Skalärprodukten är alltså *ett reellt tal*. Geometriskt motsvarar beloppet av skalärprodukten produkten av den enas längd × längden av den vektorns projektion på den andra.



Viktigare egenskaper:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \begin{cases} = 0 & \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \\ > 0 & \Leftrightarrow \quad \text{vinkeln mellan vektorerna är spetsig} \\ < 0 & \Leftrightarrow \quad \text{vinkeln mellan vektorerna är trubbig} \end{cases}$$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\ (= \boldsymbol{u}^2) = |\boldsymbol{u}|^2$

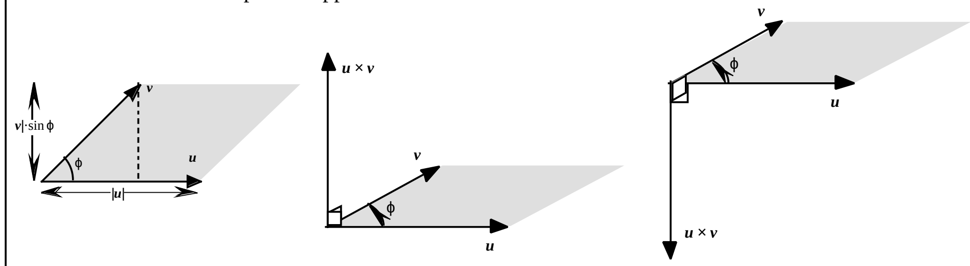
Om koordinatsytemet är av ON-typ (dvs om enhetsvektorerna är parvis vinkelräta och har längden 1) så är $(u_1\ u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$.

Kryssprodukt (Vektorprodukt):

Definition: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är den vektor i rummet

- vars längd är $|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin\phi$;
- som är vinkelrät mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ och
- är riktad så att $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ i nämnd ordning är högerorienterade.

Kryssprodukten är alltså *en vektor*. Geometriskt motsvarar dess belopp arean av den paralellogram som vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ spänner upp:



Viktigare egenskaper:

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \,//\, \boldsymbol{v}$, speciellt $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ $\qquad$ $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$

Om koordinatsystemet är av ON-typ och högerorienterat så är

$(u_1\ u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$

Trippelprodukt:

$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ = volymen av den parallellepiped som $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ spänner upp om dessa i nämnd ordning är högerorienterade, annars = – (volymen).

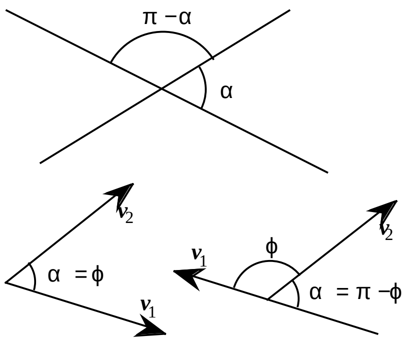
Två linjer som inte inte ligger i något gemensamt plan sägs *korsa* varandra (vara *skeva*).

Övning:

9.10 Undersök om följande linjer korsar varandra:

a. L_1: $(x, y, z) = (3, -1, 0) + t\,(1, -1, 1)$ och L_2: $(x, y, z) = (4, -2, 1) + t\,(3, -1, 0)$,

b. $L_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = 3t \end{cases}$ och $L_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$



Vinkeln α mellan två räta linjer som skär varandra definieras så att $0 \le \alpha \le \pi/2$.
Om linjernas riktningsvektorer är $\boldsymbol{v}_1$ respektive $\boldsymbol{v}_2$ är vinkeln ϕ mellan dessa = α om $0 \le \phi \le \pi/2$, i övriga fall, då $\pi/2 < \phi \le \pi$, är $\alpha = \pi - \phi$.
Vi har att $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = |\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2| \cdot \cos\phi$. Vidare ger sambandet mellan α och ϕ ovan att $\cos\alpha = |\cos\phi|$. Alltså är $|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2| \cdot \cos\alpha$ och

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2|},\ 0 \le \alpha \le \pi/2.$$

Mera allmänt säger man att α framräknat på detta vis ur två linjers riktningsvektorer $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är *vinkeln mellan linjerna* ifråga, och detta oavsett om linjerna skär varandra eller ej. Speciellt är vinkeln mellan två parallella linjer 0.

Exempel 5:

Bestäm vinkeln mellan linjerna
L_1: $(x, y, z) = (-3, 1, 4) + t\,(1, -2, 3)$ och L_2: $(x, y, z) = (10, -7, 13) + t\,(4, 2, -3)$,

Lösning: $\boldsymbol{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4, 2, -3)$ $\quad |\boldsymbol{v}_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$,

$|\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$, $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 1\cdot 4 + (-2)\cdot 2 + 3\cdot(-3) = -9$, $|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2| = 9$.

Alltså $\cos\alpha = \dfrac{9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{29}}$, dvs $\alpha = \arccos \dfrac{9}{\sqrt{406}}$ (≈ 1.11 radianer ≈ 63.5°) ■

Övningar:

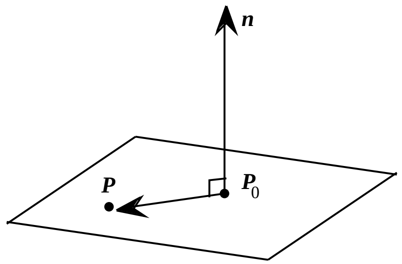
9.11 Bestäm vinkeln mellan linjerna

a. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 8 - 9t \\ z = -5 + 4t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 - 6t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 10 + t \\ y = 5 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

9.12 Hur stor vinkel bildar den linje som går genom punkterna (3, 2, –1) och (–2, 1, 0) med linjen $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{3}$?

Plan



En *normalvektor* $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ till ett plan är vinkelrät mot varje vektor i planet. Låt $\boldsymbol{P} = (x, y, z)$ vara en godtycklig punkt i planet och antag att planet går igenom en given punkt $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.
Vektorn $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ligger då i planet och är deärför vinkelrät mot $\boldsymbol{n}$. Skalärprodukten $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}}$ är alltså = 0, vilket kan skrivas:

$$\boxed{\begin{array}{l} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ \text{eller} \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{array}}$$

där $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Det plan som innehåller *x*- och *y*-axlarna kallas *xy*-planet, Det går genom origo och har normalen (0, 0, 1), dess ekvation är alltså $z = 0$. Likaså har *yz*-planet och *xz*-planet ekvationerna $x = 0$ respektive $y = 0$.

Exempel 6:

Bestäm ekvationen för det plan som går igenom punkten (–2, 1, 3) och är vinkelrätt mot linjen $(x, y, z) = (3, -4, 1) + t(3, 2, 5)$.

Lösning: Planet har linjens riktningsvektor (3, 2, 5) som normalvektor och har ekvationen

$3(x + 2) + 2(y - 1) + 5(z - 3) = 0$.

Svar: $3x + 2y + 5z - 11 = 0$. ■

Övning:

9.13 Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $\boldsymbol{P}_0$ och har normalvektorn $\boldsymbol{n}$ om

a, $\boldsymbol{P}_0 = (0, 0, 0)$ och $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$,

b, $\boldsymbol{P}_0 = (-1, 2, 1)$ och $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$,

c, $\boldsymbol{P}_0 = (2, 0, 1)$ och $\boldsymbol{n} = (0, 1, 0)$,

Exempel 7:

Bestäm ekvationen för det plan som går igenom punkterna $\boldsymbol{P}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{P}_2 = (-1, -1, 2)$ och $\boldsymbol{P}_3 = (2, -4, -1)$.

Lösning: Vektorerna $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2} = (-2, -1, 1)$ och $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3} = (1, -4, -2)$ ligger i planet. Deras kryssprodukt $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2} \times \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3}$ är vinkelrät mot dem och därför en normalvektor till planet. Vi har att $(2, -1, 1)\times(1, -4, -2) = (6, -3, 9) = 3(2, -1, 3) \,//\, (2, -1, 3)$, som vi (av bekvämlighet) tar som normalvektor $\boldsymbol{n}$.

Eftersom t ex (1, 0, 1) ligger i planet så är dess ekvation

$2(x - 1) - 1(y - 0) + 3(z - 1) = 0$, varav

Svar: $2x - y + 3z - 5 = 0$. ■

Övningar:

9.14 Bestäm ekvationen för det plan som går igenom punkterna (1,2, 3), (2, 4, 8) och (3, 7, 9). Ligger punkten (2, 6, 1) i planet?

9.15 Ange ekvationen för det plan genom origo som innehåller punkterna (1, 1, –1) och (2, 2, 2).

Exempel 8:

Bestäm ekvationen för det plan som går igenom punkterna $\boldsymbol{P}_1 = (1, 1, 2)$ och $\boldsymbol{P}_2 = (-2, 3, -3)$ och är parallellt med den räta linjen $x - 1 = 2 - y = z$.

Lösning: Från $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ avläser man att (1, –1, 1) är riktningsvektor till linjen. Den vektorn ligger alltså i planet. Likaså ligger vektorn $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, 2, -5)$ i planet. En normalvektor till planet alltså av kryssprodukten:

$$(1, -1, 1)\times(-3, 2, -5) = (3, 2, -1).$$

Används att (1, 1, 2) är en punkt på linjen erhålls planets ekvation:

$$3(x-1) + 2(y-1) - 1\cdot(z-2) = 0, \text{ varav}$$

Svar: $3x + 2y - z - 3 = 0$. ■

Övning:

9.16 Bestäm klonstanterna a och b så att planet $ax + by - 1 = 0$ går genom punkten (1, 1, 1) och är parallellt med vektorn (1, 2, 3).

Exempel 9:

Undersök om planen $3x - 2y - z - 2 = 0$ och $2x - 3y + z - 3 = 0$ skär varandra och ange i förekommande fall ekvationen för skärningslinjen.

Lösning: Planens normalvektorer $\boldsymbol{n}_1 = (3, -2, -1)$ och $\boldsymbol{n}_2 = (2, -3, 1)$.

Deras kryssprodukt $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (3, -2, -1)\times(2, -3, 1) = (-5, -5, -5)$ är $\neq (0, 0, 0)$, dvs de är inte parallella. Planen är då heller inte parallella och skär därför varandra längs en rät linje. Kryssprodukten pekar ut en riktning (1, 1, 1) som är vinkelrät mot båda planen. Eftersom skärningslinjen ju ligger i båda planen måste denna riktning också vara en riktningsvektor till skärningslinjen.

För att nu kunna skriva upp linjens ekvation behöver vi bestämma någon punkt på skärningslinjen. Det finns oändligt många sådana att välja på. Exempelvis kan vi bestämma en där z-koordinaten = 0. För motsvarande x- och y-koordinater gäller då att

$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$. $\boldsymbol{P}_0 = (0, -1, 0)$ är alltså en punkt på linjen och dess ekvation på vektorform $(x, y, z) = (0, -1, 0) + t(1, 1, 1)$

Svar: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$ ■

Övning:

9.17 På vilket sätt skär följande plan varandra?

a. $x + 2y + 3z = 8$ och $x - 2y + z = 0$,

b. $2x - 4y + 6z = 7$ och $x - 2y + 3z = 0$,

c. $3x + y + 2z = 6$ och $x - y = 1$,

d. $x + y - z = 2$ och $2x + 2y - 2z - 4 = 0$.

Exempel 10:

Undersök om den räta linjen $(x, y, z) = (2, -1, 3) + t(3, 1, -1)$ och planet $3x - 2y + z + 1 = 0$ har några gemensamma punkter och bestäm dem i förekommande fall.

Lösning: Sättes $x = 2 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = 3 - t$, i planets ekvation får man

$3(2 + 3t) - 2(-1 - 2t) + (3 - t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 6t = -12 \Leftrightarrow t = -2$, vilket ger skärningspunkten $(x, y, z) = (2, -1, 3) + (-2)(3, 1, -1) = (-4, -3, 5)$.

Svar: (–4, –3, 5). ■

Övning:

9.18 Bestäm skärningen mellan

a. linjen $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ och planet $x - 3y + 2z = 3$,

b. linjen $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = -z$ och planet $x - y - z = 3$,

c. linjen $(x, y, z) = (3, 0, -1) + t(1, -1, 1)$ och planet $x + y - 3 = 0$,

d. linjen $(x, y, z) = (3 - t, -1 + 2t, 2 - 2t)$ och xy-planet.

Vinkeln mellan två plan är den spetsiga vinkeln mellan planens normallinjer

Exempel 11:

Bestäm vinkeln ϕ mellan planen $2x - 3y + z = 3$ och $x + y = 0$.

Lösning: $\boldsymbol{n}_1 = (2, -3, 1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1, 1, 0)$,

$$\cos\phi = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|2\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 1\cdot 0|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{28}}$$

Svar: $\phi = \arccos\frac{1}{\sqrt{28}}$. ■

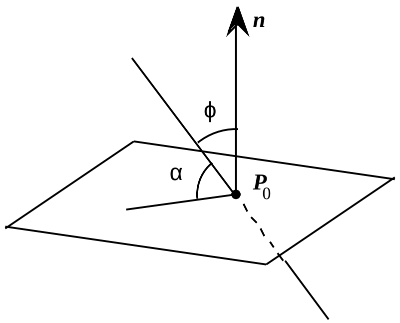
Övning:

9.19 Bestäm vinkeln mellan planen

a. $x + y - z = 1$ och $2x + y - z + 1 = 0$,

b. $x = y$ och $y = -z$,

c. $x = 3$ och $x - y + z = 3$.



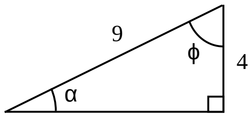
Med *vinkeln* α *mellan en rät linje och ett plan* menas komplementvinkeln, $\alpha = \pi/2 - \phi$, till den spetsiga vinkeln ϕ mellan linjen och planets normallinje. Det gäller då alltid att $0 \le \alpha \le \pi/2$.

Exempel 12:

Bestäm vinkeln mellan linjen $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ och planet $2x - y + 2z - 1 = 0$.

Lösning: $\boldsymbol{n} = (2, -1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (-1, -2, 2)$,

$$\cos\phi = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{v}|} = \frac{|2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{9}.$$



Men $\cos\phi = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$, alltså $\alpha = \arcsin\frac{4}{9}$.

Svar. $\arcsin\frac{4}{9}$. ■

Övning:

9.20 Bestäm vinkeln mellan

a. linjen $(x, y, z) = (2, -1, 0) + t(-1, 2, 3)$ och planet $x - 3y + 2z - 3 = 0$,

b. linjen $3 - x = \frac{y + 2}{2} = -\frac{z}{2}$ och planet $2x - y + 2z = 3$,

c. linjen $(x, y, z) = (4 + t, 3t, 1 - 2t)$ och planet $x + 3y + 5z - 1 = 0$.

LEDNINGAR

1.1 Använd logaritmlagarna
a. Använd att $\ln 2^n = n \ln 2$
b. Använd att $\log_a b = \ln b / \ln a$
c. Använd definitionerna $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ resp $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$

1.2 Använd potenslagarna.
a. och b. Vänsterleden i de båda ekvationerna är identiska:
$\sqrt{e^x} = e^{x/2} = (\sqrt{e})^x$

1.3 Använd definitionen av sinh-funktionen. Sätt $e^x = t$ och observera att $t > 0$.

1.4 Använd logaritmlagarna.
a. $\ln a + \ln b = \ln ab$, observera också att x måste väljas så att $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$ och $x^2 - 1 \geq 1$, detta eftersom funktionen $\ln t$ definierad endast då $t > 0$ och funktionen $\sqrt{t}$ endast då $t \geq 0$.
b. Jämför a.
c. $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$
d. Jämför a.
e. $\ln(2 - x^2) = \ln(-x)$ / $2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 2$
Prövning visar att $x = -1$ är en rot till den givna ekvationen, men att $x = 2$ inte är det — argumenten för ln-funktionerna är då negativa!

1.5 a. Kvadrera ekvationen. Pröva lösningarna till den så uppkommna ekvationen.
b. Vid bestämningen av definitionsmängden: Observera att $y > 0$ och $x + 2 > 0$, — lg-funktionen är bara definierad för positiva argument.

1.6 Använd potenslagarna, bl a $(a^b)^c = a^{bc}$, och visa t ex att det första talet $= \sqrt{2}^{\left(2^{1/\sqrt{2}}\right)}$ och att det andra $= \sqrt{2}^{\,2}$ (= 2).
Obs sedan att $\sqrt{2} > 1$ $\quad 2^{1/\sqrt{2}} < 2$.
Alternativ: Logaritmera talen två gånger och använd logaritmlagarna för att skriva om de logaritmerade uttrycken till
$(1/\sqrt{2} - 1) \log 2 + \log \log 2$ resp. $\log \log 2$

1.7 Eliminerar man $\ln p$ ur de båda givna sambanden får man att höjden beror på kokpunkten enligt: $h = 11\left(\ln 1013 - \frac{\sqrt{K - 12} + 1}{1.5}\right)$

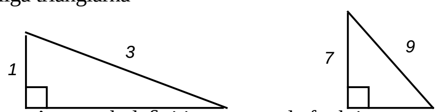
2.1 a. Använd definitionerna av de trigonometriska funktionerna och förhållandena mellan sidorna i en 30°– 60° – 90°-triangel.
b. Använd att $\frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{6}$,
att $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$, att $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$
och att $\cos \pi/6$ kan beräknas exakt.

2.2 Se formelsamlingen
a. Använd att $\sin a \sin b = (\cos(a - b) - \cos(a + b))/2$
b. Använd konjugatregeln, trigonometriska ettan och att $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.
c. Använd trigonometriska ettan och att $2 \cos x \sin x = \sin 2x$.
d. Använd t ex att
$\sin^2 a = (1 - \cos 2a)/2$, $\cos^2 a = (1 + \cos 2a)/2$ och att
$\cos a \cos b = (\cos(a - b) + \cos(a + b))/2$

2.3 Se formelsamlingen. Använd t ex
a. $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2n\pi \\ a = \pi - b + 2n\pi \end{cases}$, n heltal
b. $\cos a = \sin(\pi/2 - a)$ och sambandet i ledningen till a.
c. $\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + n\pi$, n heltal.
Obs att $\tan n\pi/2$ är odefinierat för udda n.
d. sambanden i ledningarna till a. och till b.

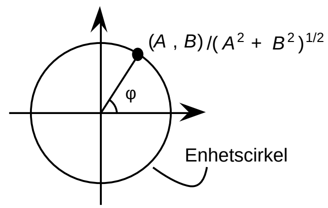
2.4 Se formelsamlingen.
a. Dividera med $\cos x$.
b. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
c. Använd trigonometriska ettan för att uttrycka $\cos^4 x$ som en funktion av $\sin x$, sätt sedan $\sin x = t$.
d. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, sätt sedan $\cos x = t$.
e. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

2.5 Betrakta de rätvinkliga trianglarna



och använd Pythagoras' sats och definitionerna av de funktioner som ingår i uttrycken.

2.6 a. Sätt t ex $A/(A^2 + B^2)^{1/2} = \sin\varphi$
och $B/(A^2 + B^2)^{1/2} = \cos\varphi$
(jmfr figuren) och använd additionssatsen för sinusfunktionen.
b. Obs att $3 \cos x + 4 \sin x = 5 \sin(x + \varphi)$
där $\varphi = \arctan(3/4)$



3.11 Skriv de olika faktorerna på polär form. Utför sedan multiplikationer, divisioner och potensering med potenslagarna. Utnyttja att $e^{2\pi i n} = 1$ om n heltal.

3.12 Bryt tex ut $|\bar{z}|$ ur nämnaren. Utnyttja att $1/\bar{z} = z$ då $|z| = 1$.

3.13 e. Sätt $(z + 1)/(z - 1) = w$ och bestäm först w.
i. Dividera först ekvationen med $3 + 4i$ i syfte att få en ekvation med z^2-koefficienten 1.
j. Ekvationen är av 2:a graden med avseende på $w = z^2$.
k. Ekvationen är av 2:a graden med avseende på $w = z^2$. Altenativt: Båda leden har faktorn $z^2 - 2$ gemensam. Ekvationen är därför ekvivalent med att $z^2 - 2 = 0$ eller $z^2 + 2 = 2i$.

l. Konjugera ekvationen och bestäm z^2 ur de så erhållna ekvationen.
o. Ekvationen är av 2:a graden med avseende på $w = z^3$.

4.3 Utnyttja att rötternas produkt är = den bekanta termen och att rötternas summa = rötternas summa med omvänt tecken.

4.4 Polynomet har en faktor $3x + 2$. Efter division med denna får man en andragradsekvation att lösa.

4.5 Polynomet har en faktor $x + \sqrt{3}$. Efter division med denna får man en andragradsekvation att lösa.

4.6 Bestäm c genom att sätta in $x = 2$ i ekvationen. Dividera sedan polynomet med faktorn $x - 2$. Man får till slut en andragradsekvation att lösa.

4.7 Jämför uppg 4.6.

4.8 Polynomet måste också ha de konjugerade talen –i och 3 + i som rötter och därför vara av grad minst 5. Konstruera ett 5:egradspolynom med hjälp av faktorsatsen.

4.9 Ekvationen har reella koefficienter och måste därför också ha 3 – i som rot. En faktor i polynomet är då $(x - 3 - \mathrm{i})(x - 3 + \mathrm{i}) = x^2 - 6x + 10$. Den andra faktorn kan beräknas med divisionsalgoritmen och har graden 2.

4.10 Den i uppgiften beskrivna roten måste ha formen $x_1 = r(1 + \mathrm{i})$ där r är reellt. Insättes detta i ekvationen får man efter separation i real- resp. imaginärdel två ekvationer som r måste uppfylla. Dessa satisfieras av $r = -2$.

4.11 Om $x_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b$ ($b \neq 0$, $a^2 + b^2 = 1$) är rötter, så måste $x^2 - 2ax + 1$ vara en faktor i polynomet. Ansätt därför $5x^4 + 19x^3 - 15x^2 + 13x + 10 = (x^2 - 2ax + 1)(5x^2 + Ax + B)$ och bestäm a; A och B ur det ekvationssystem man får då man identifierar koefficienterna i de båda leden.

4.12 Använd att om $x = p/q$ (p och q heltal, bråket förkortat så långt som möjligt), så är p delare till den bekanta termen och q till koefficienten för högstagradstermen.

4.13 Sök först alla komplexa nollställen till polynomen. Jmfr exempel 4.9.
Ytterligare ledning till a. och b.: Polynomen har varsin heltalsrot.
Till g: Summera den geometriska serien. (Jmfr också resultatet i f.)
Till h: Polynomet är av 2:a graden med avseende på $y = x^3$.

4.14 Identifiera koefficienterna i likheten $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

4.15 Använd resutatet i föregående uppgift. Den tredjegradsekvation man får har en heltalsrot.

4.16 Gör som i uppgift 4.14 fast med n st. faktorer.

6.5 Låt $y(t)$ vara koncentrationen av ämnet vid tiden t mätt i dygn. Verifiera först att om ΔM är minskningen av ämnet i reservoiren under (det korta) tidsintervallet Δt och Δy är koncentrationsändringen under samma tid, så är $-\Delta M \approx 1000\,\Delta y \approx -20\,y\,\Delta t$, vilket leder till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{50}\,y$$

Lös denna och använd sedan villkoren $y(0) = 2\cdot10^{-4}$ och $y(T) = 10^{-7}$ för att bestämma tidpunkten T, vid vilken koncentrationen av föroreningen är 10^{-5}%.

7.1 b. Funktionen är = $x^{7/8}$

7.2 Välj f och g (enligt beteckningarna i partialintegrationsformeln sid 10):
a. $f = \cos x$, $g = x$
b. $f = e^{-x}$, $g = x^2$, partialintegrera ytterligare en gång
c. $f = x^{-2}$, $g = \ln|x|$
d. $f = 1$, $g = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
e. $f = \sin x$, $g = e^{2x}$ (upprepas)
f. $f = \cos 2x$, $g = \ln(\tan x)$

7.3
a. $3x = t$
b. $4x + 3 = t$
c. x^2 (eller $x^2 + 2) = t$
d. x^3 (eller $x^3 + 2) = t$
e. x^6 (eller $x^6 + 1) = t$
f. $\sqrt{x} = t$
g. $\cos x = t$
h. $\cos x = t$
i. $e^x = t$
j. $e^x = t$
k. $e^x = t$
l. $\ln x = t$
m. $x^2 + 1 = t$

8.1
a. $(x^2 + 2x)\cdot\frac{1}{1+x}$, använd sedan ”standardutvecklingen” av $\frac{1}{1+x}$.
b. $\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+2x/3}$, sätt $2x/3 = t$ och använd utvecklingen av $\frac{1}{1+t}$.
c. $\ln(3 + 2x) = \ln 3 + \ln(1 + 2x/3)$.
Sätt $2x/3 = t$ och använd utvecklingen av $\ln(1 + t)$.
Alternativ: Funktionens derivata = 2·(funktionen i uppgift b), svaret erhålls alltså genom att man integrerar svaret i b. och dividerar detta med 2.
e. $\frac{1}{2+x+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x+x^2)/2}$, sätt $(x + x^2)/2 = t$ och använd utvecklingen av $\frac{1}{1+t}$.
f. Sätt $x^2 - x = t$ och använd utvecklingen av e^t.
g. $e^{x+1} = e\cdot e^x$. Använd sedan utvecklingen av e^x.
h. Sätt in utvecklingen av $t = \sin x$ i utvecklingen av e^t.

8.2 Serieutveckling ger att $\cosh\frac{x}{a} - 1 \approx \frac{x^2}{2a^2}$ om a är stort i förhållande till x. Om x är halva avståndet mellan stolparna och Δh är ”nedhänget”, så är $h + \Delta h \approx h + a\cdot\frac{x^2}{2a^2}$.

8.3

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^6\right)$$

8.4 Man har att $\cos\phi = R/(R + h)$ och $\tan\phi = (R\phi + l/2)/R$.
Detta ger $h = R(1 - \cos\phi)/\cos\phi \approx$ [serieutveckling för små ϕ] $\approx R\cdot\phi^2/2$ och
$l = 2R(\tan\phi - \phi) \approx$ [serieutveckling för små ϕ] $\approx 2R\cdot\phi^3/3$.
Elimineras ϕ ur dessa båda samband erhålls $h \approx (9/32)^{1/3}\cdot R^{1/3}\cdot l^{2/3}$.
Insättes sedan jordradien $R = 4\cdot10^7/2\pi$ meter och $l = 1$ meter får man $h \approx (45/8\pi)^{1/3}\cdot100$ meter.

9.5 Visa att linjerna är parallella och att tex punkten (0, 8, 3) som ligger på en av linjerna också ligger på den andra. (Alternativt: Visa att någon vektor mellan en punkt på vardera linjen är parallell med båda linjernas riktningsvektorer.)

1.1 a. 3 b. 8 c. a resp $\sqrt{a^2+1}$

1.2 a. och b. $x = 0$, $x = 4$ c. $x = -1, x = 2$

1.3 $\ln(1+\sqrt{2})$

1.4 a. Alla $x \geq \sqrt{2}$ b. $x = -1$ c. $x = 1, x = e^4$
d. $x = 2$ e. $x = -1$

1.5 a. Ekvationen har inga lösningar. b. $y(x) = \dfrac{100(x+2)}{x^2}$, $x \neq 0$ och $x > -2$

1.6 $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ är störst.

1.7 Ca 6 100 m

2.1 a. $\dfrac{9+4\sqrt{3}}{11}$ b. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

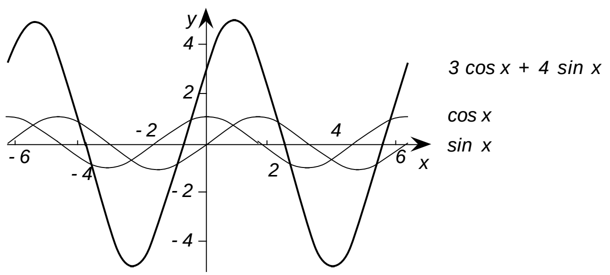
2.2 a. $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 5x$ b. $\cos 2x$ c. $1 + \sin 2x$
d. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 2y - \frac{1}{8}\cos 2(x-y) - \frac{1}{8}\cos 2(x+y)$

2.3 a. $x = 2n\pi$ eller $x = (2n+1)\pi/3$, n godtyckligt heltal.
b. $x = \pi/4 + n\pi$ eller $x = (4n+1)\pi/104$, n godtyckligt heltal.
c. $x = n\pi$, n godtyckligt heltal.
d. $x = (4n+1)\pi/8$ eller $x = (4n-1)\pi/4$, n godtyckligt heltal.

2.4 a. $x = \pi/3 + n\pi$, n godtyckligt heltal.
b. $x = \arctan 4 + n\pi$ eller $x = -\pi/4 + n\pi$, n godtyckligt heltal.
c. $x = n\pi/2$, n godtyckligt heltal.
d. $x = \pm \arccos \dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + 2n\pi$, n godtyckligt heltal.
e. $x = \pi/2 + n\pi$, $x = \pi/12 + n\pi$ eller $x = 5\pi/12 + n\pi$, n godtyckligt heltal.

2.5 a. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ b. $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ c. $-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

2.6 b.



3.1 a. $-1 + 2i$ b. $2i$ c. $15 + 15i$
d. $6 - 8i$ e. $7 - 2i$ f. 0
g. 1, i, –1 resp –i, allteftersom n har resten 0, 1, 2 el. 3 vid division med 4.
h. –8

3.2 a. $3 + 4i$ b. 5 c. $\frac{2}{5} - \frac{9}{5}i$
d. 0 e. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

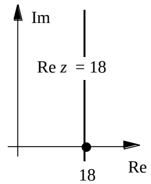
3.3 a. $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = 3$ b. $\frac{3}{\sqrt{2}}$ resp $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c. 0 resp 6
d. $\frac{1}{\pi}$ resp 0.

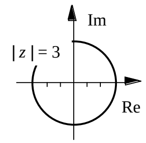
3.4 a. $-1 + 2i$ b. $-\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$ c. Lösningar saknas
d. $3 + 7i$ e. 2 f. $4 - 2i$
g. Lösningar saknas (Ekvationen kan skrivas $\operatorname{Re} z = 3i$)
h. $z = a + 3i$, a godtyckligt reellt. (Ekvationen kan skrivas $\operatorname{Im} z = 3$)

3.5 $z = 3 + i$, $w = 5 - 2i$

3.6 a. 5 b. $\sqrt{13}$ c. $2\sqrt{10}$
d. $5\sqrt{13}$ e. $5/\sqrt{13}$ f. 1
g. $\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2\cos(\alpha/2)$

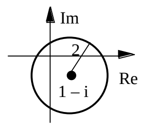
3.7

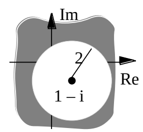




a. Den räta linjen $\operatorname{Re} z = 18$.

b. Cirkeln med medelpunkt i origo och radie 3.

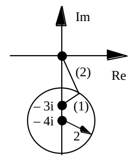




c. Cirkeln med medelpunkt i $1 - i$ och radie 2.

d. Området utanför cirkeln i c-uppgiften.

3.8 Punkterna i planet, som ligger dubbelt så långt från origo som från punkten $-3i$, ligger på en cirkel med medelpunkt $-4i$ och radie 2.



3.9

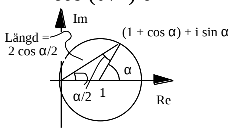
	Belopp	Argument	Polär form
a.	7	π	$7e^{i\pi}$
b.	3	$\pi/2$	$3e^{i\pi/2}$
c.	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}$
d.	$1/\sqrt{2}$	$\pi/4$	$(1/\sqrt{2})\,e^{i\pi/4}$
e.	$\sqrt{2}$	$\pi/12$	$\sqrt{2}\,e^{i\pi/12}$
f.	$2^6 = 64$	π	$64\,e^{i\pi}$
g.	1	$2\pi/3$	$e^{2\pi i/3}$
h.	25	$\arctan(24/7)$	$25\,e^{i\arctan(24/7)}$

Facit till avsnitt 3

i. $\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2\cos(\alpha/2)$

$\arctan[(\sin\alpha)/(1+\cos\alpha)] = \arctan[\tan(\alpha/2)] = \alpha/2$

$2\cos(\alpha/2)\, e^{i\alpha/2}$



3.10 a. $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$ b. $1/2 - i\sqrt{3}/2$ c. $\sqrt{3}/2 + i/2$
d. $\cos 1 + i \sin 1$ e. $i\, e^{\pi/2}$ f. $e^{2x}\cos 3x + i\, e^{2x}\sin 3x$

3.11 a. 32i b. $(1+i)/\sqrt{2})$ c. $(-1+i\sqrt{3})/2$

3.12 *Ledning*: Bryt t ex ut $\bar{z}$ ur nämnaren och använd att $1/\bar{z} = z$ då $|z| = 1$.

3.13
a. $\pm(1+i)$ b. $\pm(1+3i)$
c. $\pm(2+i)$, $\pm(1-2i)$ d. $\pm(\sqrt{\sqrt{2}-1} + i\sqrt{\sqrt{2}+1})$
e. ±1 f. i, $3+i$
g. $1+3i$, $1+5i$ h. $1-7i$, $-3-2i$
i. i, $-4-3i$ j. ±1, $\pm(1+i)/\sqrt{2}$
k. $\pm\sqrt{2}$, $\pm(\sqrt{\sqrt{2}-1} + i\sqrt{\sqrt{2}+1})$ l. $\pm(1+2i)$
m. $-i$ och $(\pm\sqrt{3}+i)/2$ n. ±2 och $\pm1 \pm \sqrt{3}$
o. 1, $-i$, $(\pm\sqrt{3}+i)/2$ och $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ p. 3, $3e^{\pm 2\pi i/5}$ och $3e^{\pm 4\pi i/}$

Svar till avsnitt 4

4.1 a. 2 b. 40 c. 1

4.2 a. Kvot = $x-8$, rest = 0. b. Kvot = $x-9$, rest = 2. c. Kvot = 0, rest = $x-7$.
d. Kvot = x, rest = $-x$. e. Kvot = $7x^2 + 3x + 8$, rest = $41x - 40$.

4.3 a. 2 och 3. b. 2 och –3. c. 1 och 6.
d. –7 och –11. e. –2 och 101.

4.4 $1 \pm i\sqrt{6}$ och $-2/3$.

4.5 $-\sqrt{3} \pm \sqrt{6}$ och $\sqrt{3}$.

4.6 $c = 70$. Rötterna är 2, 5 och –7.

4.7 $c = -14$. Rötterna är i, –2i och 7.

4.8 $(x-1)(x^2+1)((x-3)^2+1) = x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 17x^2 + 16x - 10$.

4.9 $3 \pm i$ och $-3 \pm \sqrt{2}$.

4.10 $-2 \pm 2i$ och $2 \pm \sqrt{5}$. ($x_1 = -2 - 2i$)

4.11 $(3 \pm 4i)/5$ och $(-5 \pm \sqrt{17})/2$.

4.12 a. 2, 3 och –5. b. $1/2$ och $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$.
c. $-1/5$ och $2 \pm \sqrt{3}$). d. 2, 1/3 och $-2 \pm \sqrt{3}$).

4.13
a. $(x-1)(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$ b. $(x-1)(x^2+6x+11)$
c. $(x+2)(x^2-2x+4)$ d. $(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$
e. $(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$
f. $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
g. $(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
h. $2(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$

4.15 1 och $2 \pm \sqrt{3}$ dm.
(Sidokanterna är rötterna till ekvationen $x^3 - k/4\, x^2 + a/2\, x - v = 0$ där v är volymen, a summan av sidoareorna och k summan av kantlängderna.)

5.1 a. $7x^6 - 15x^2$ b. $4(x^2 - x)^3(2x - 1)$

c. $-(7x + 1)(x + 1)^2(1 - x)^3$ d. $\frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$

e. $\frac{2x}{(x + 1)^3}$ f. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ g. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

h. $\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ i. $-\frac{1}{2\sqrt{(x + 4)^3}}$ j. $\frac{2}{(x^2 + 2)^{3/2}}$

k. $\frac{1}{1 - x^2}\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$ l. $\frac{2x^2 - 1}{x^2(1 - x^2)^{3/2}}$

m. $(2x + 1)e^{x^2 + x}$ n. $(-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$

o. $\frac{1}{2x}$ p. $\frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}}$ q. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + ax + b}}$

r. $-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$ s. $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$ t. $2x\cos x^2\, e^{\sin x^2}$

u. $\frac{1}{\cos x}$ v. $\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$ w. $\frac{1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

x. $\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}$ y. 0 z. $x^x(\ln x + 1)$

å. $x^{\tan x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x}\right)$ ä. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$ ö. 0 ü. 0

6.1 a. $y = Ae^{3x}$ b. $y = Ae^{3x} + Be^{-x}$

c. $y = Ae^{2x} + B$ d. $y = (Ax + B)e^{2x}$

e. $y = A\cos x + B\sin x$ f. $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

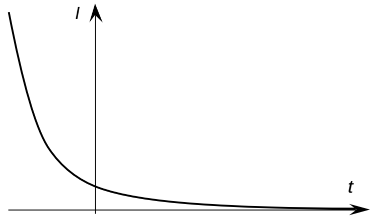
6.2 a. $y = e^{6x} + e^{-5x}$ b. $y = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin kx & \text{om } k \neq 0 \\ x & \text{om } k = 0 \end{cases}$,

6.3 a. $y = -1 + Ae^{6x} + Be^{-5x}$ b. $y = -\frac{1}{5}x - \frac{2}{75} + Ae^{6x} + Be^{-5x}$

c. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} + Ae^{x} + Be^{-x} + Ce^{2x} + De^{-2x}$ d. $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{15}{8}x + Ae^{x} + Be^{-x} + Ce^{2x} + De^{-2x}$

e. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + A + Be^{-x}$ f. $y = \frac{2}{13}e^{3x} + e^{-x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

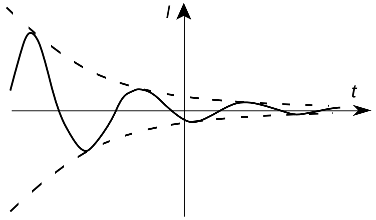
6.4 a.



$I = A\,e^{-3t} + B\,e^{-t}$

monotont avtagande

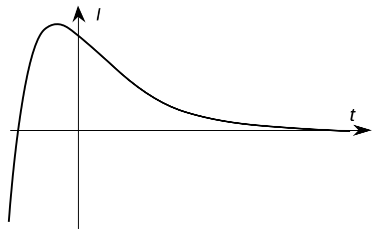
b.



$I = A\,e^{-2t}\cos(t + f)$

dämpad svängning

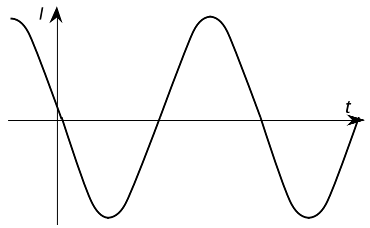
c.



$I = (At + B)e^{-t}$

så småningom monotont avtagande

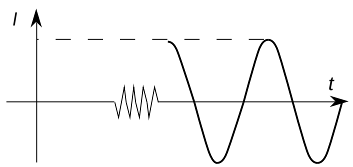
d.



$I = A\cos(t + \varphi)$

odämpad svängning

e.

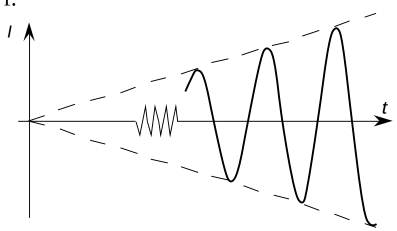


$I = \frac{1}{\sqrt{20}}\cos(t + \varphi) + A\,e^{-3t} + B\,e^{-t} \approx$

$\approx \frac{1}{\sqrt{20}}\cos(t + \varphi)$, $\tan f = \frac{1}{2}$, t ”stort”.

Fasförskjuten svängning med mindre amplitud än den hos $V(t)$.

f.



$I \approx -\frac{1}{2}t\cos t$, t ”stort”.

Svängning med växande amplitud.

6.5 Efter ca 380 dagar. (Beräkningarna ger $50 \cdot \ln 2000$ dagar)

Svartill avsnitt 7 och 8

7.1 a. $-\frac{1}{2x^2} + C$ b. $\frac{8}{15}\, x \sqrt[8]{x^7} + C$ c. $\frac{m}{m+n}\, x \sqrt[m]{x^n} + C$

d. $\frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{2} x^4 + x + C$ e. $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$ f. $\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln |x-2| + C$

g. $-\frac{1}{n} e^{-nx} + C$ h. $\frac{1}{3} \sin (3x+2) + C$ i. $\arctan (x+1) + C$

j. $\frac{1}{3} \tan 3x + C$ k. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ l. $\arcsin (x-1) + C$

m. $\frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$ n. $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$

7.2 a. $x \sin x + \cos x + C$ b. $2 - 5e^{-1}$ c. $-\frac{1}{x}(\ln |x|+1) + C$

d. $x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 \arctan x + C$ e. $\frac{1}{5} e^{2x}(2 \sin x - \cos x) + C$

f. $\frac{\sin 2x}{2} \ln (\tan x) - x + C$

7.3 a. $\frac{1}{3} e^{3x} + C$ b. $\frac{1}{4} \tan (4x + 3) + C$ c. $-\frac{1}{2(x^2 + 2)} + C$

d. $\frac{2}{15}$ e. $\frac{1}{9} (x^6 + 1)^{3/2} + C$ f. $2e(e - 1)$

g. $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$ h. $\frac{2}{3}$ i. $\arctan(e^x) + C$

j. $-\frac{\pi}{4} + \arctan e$ k. $2 \arctan(e^x) + C$ l. $\ln \left|\ln x\right| + C$

m. $\sqrt{1 + x^2} + C$

8.1 a. $2x - x^2 + x^3 - x^4 + O(x^5)$ b. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} x + \frac{4}{27} x^2 + O(x^3)$

c. $\ln 3 + \frac{2}{3} x - \frac{2}{9} x^2 + \frac{8}{81} x^3 + O(x^4)$ d. $1 - 2x^2 + x^3 + O(x^4)$

e. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x^2 + O(x^3)$ f. $1 - x + \frac{3}{2} x^2 + O(x^3)$

g. $e + ex + \frac{e}{2} x^2 + O(x^3)$ h. $1 + x + \frac{1}{2} x^2 + O(x^3)$

8.2 Ca 125 m

8.3 $\frac{3}{8}\, m_0 \frac{v^4}{c^2}$

8.4 $K = \sqrt[3]{\frac{9}{32}}$, $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. Om $l = 1$ meter så är $h = \sqrt[3]{\frac{45}{8\pi}} \approx 120$ meter!

Svar till avsnitt 9

9.1 a. $(x, y, z) = (3, -1, 2) + t(2, 3, 1)$, b. $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(0, 0, 1)$,
c. $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-1, 1, 0)$.

9.2 a. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

b. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 + t \end{cases}$ Kan inte skrivas på enpunktsform.

c. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ Kan inte skrivas på enpunktsform.

9.3 a. $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, -3, -1)$, b. $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, -4)$,

9.4 a. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - 4t \end{cases}$

9.5 Nej, båda ekvationerna framställer samma linje.

9.6 a. $(x, y, z) = (-3, 0, 1) + t(1, 1, 0)$, b. $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(2, 3, 1)$.

9.7 a. Linjerna skär varandra i punkten (2, 3, 1). b. Linjerna sammanfaller.
c. Linjerna skär inte varandra.

9.8 Linjerna är ortogonala.

9.9 a. $a = -2$, b. $a = 0$ eller $a = 1/2$.

9.10 a. Linjerna skär varandra i punkten (4, –2, 1), b. Linjerna korsar varandra.

9.11 a. $\pi/4$ b. $\pi/3$

9.12 $\arccos \frac{19}{\sqrt{783}}$

9.13 a. $x + y + z = 0$ b. $z - 1 = 0$ c. $y = 0$

9.14 $13x - 4y - z - 2 = 0$. Punkten (2, 6, 1) ligger inte i planet.

9.15 $x = y$

9.16 $a = 3$, $b = -2$

9.17 a. Planen skär varandra längs linjen $(x, y, z) = (4, 2, 0) + t(4, 1, -2)$,
b. Planen är parallella och saknar gemensamma punkter.

c. Planen skär varandra längs linjen $(x, y, z) = (0, -1, 7/2) + t(1, 1, -2)$,
d. Planen är parallella och sammanfallande.

9.18 a. $(0, 3, 6)$ b. Linjen ligger i planet.
c. Linjen ligger i planet. d. $(2, 1, 0)$.

9.19 a. $\pi/2$ b. $\pi/3$ c. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$

9.20 a. $\arcsin \frac{1}{14}$ b. $\arcsin \frac{8}{9}$ c. 0