



Tentamen i kursen SF1673

Datum: 2019-01-14

Skrivtid: 8:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

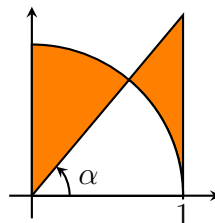
1. Bestäm volymen av den ellipsoid som bildas då

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

roterar kring x -axeln.

(medelpoäng 2.7)

2. Låt $\alpha \in [0, \pi/2)$. För vilket värde på vinkeln α minimeras den färgade arean?



(medelpoäng 2.38)

3. Avgör om följande integraler är konvergenta eller divergenta

(a)

$$\int_1^{\infty} \frac{x + \sin x}{x^2 + \cos 4x} dx$$

(b)

$$\int_1^{\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

(medelpoäng 1.89)

4. Visa att för $|x| < 1/2$ så gäller att

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{8|x|^3}{3}.$$

(medelpoäng 1.7)

5. Bestäm konstanterna $a > 0$ och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{a}{x^2} & x < 0, \\ b & x = 0, \\ \frac{e^{ax}-1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

(medelpoäng 2.81)

6. Medelvärdessatsen för derivator säger att om $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion på intervallet (a, b) som är kontinuerlig i $[a, b]$ så existerar det en punkt $\alpha \in (a, b)$ sådan att

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(a) Bevisa medelvärdessatsen för derivator (du får anta att Rolles sats är känd).

(b) Visa att om $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f växande i (a, b) .

(c) Visa att om f är växande i (a, b) så är $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in (a, b)$.

(medelpoäng 1.33)

7. Beräkna integralen

$$\int_4^5 \ln(x^2 - 3x + 2) dx.$$

(medelpoäng 1.93)

8. Låt f vara en deriverbar funktion som uppfyller att

$$1 < |f(x)| + |f'(x)| < 2$$

för varje $x \in [0, 1]$. Visa att f har högst ett nollställe i $[0, 1]$.

(medelpoäng 0.81)

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!

Lösningar till tentamen i kursen SF1673 - 2019-01-14

1. Volymen ges av

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a y(x)^2 dx = 2\pi \int_0^a y(x)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a \\ &= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} \right) = \frac{4\pi ab^2}{3} \end{aligned}$$

Vi noterar att om $a = b$ får vi känd formel för volymen av ett klot.

2. Ett uttryck för arean är

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{\pi/2 - \alpha}{2\pi} \pi + \frac{\tan \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\pi} \pi \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\tan \alpha}{2} - \alpha \end{aligned}$$

Vi har att $A(0) = \pi/4$ och $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} A(\alpha) = \infty$. Funktionen är deriverbar för varje $\alpha \in (0, \pi/2)$. Låt oss söka efter stationära punkter

$$A'(\alpha) = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} - 1 = 0$$

ger att

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

givet att $\alpha \in (0, \pi/2)$. Vi har därmed att $A'(\alpha) = 0$ om och endast om $\alpha = \pi/4$.

Det minsta värdet på arean A blir därmed det minsta värdet av $A(0)$ och $A(\pi/4)$. Vi har att

$$A(\pi/4) = \frac{\tan(\pi/4)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $A(\pi/4) = 1/2$ är mindre än $A(0) = \pi/4$ så gäller att arean är minimerad för $\alpha = \pi/4$.

3. Avgör om följande integraler är konvergenta eller divergenta

(a) Vi konstaterar att

$$f(x) := \frac{x + \sin x}{x^2 + \cos 4x} \geq 0$$

och jämför med funktionen $g(x) = 1/x$. Vi får att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos 4x}{x^2}} = 1$$

och eftersom $\int_1^\infty g(x) dx$ är divergent så gäller även att $\int_1^\infty f(x) dx$ är divergent.

(b) Tylorutveckling ger att

$$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^6}\right),$$

för stora x eller små $1/x^2$. Eftersom

$$f(x) := \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 0$$

för stora x och jämförelse med funktionen

$$g(x) := \frac{1}{x^{3/2}}$$

ger att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Så får vi att eftersom $\int_1^\infty g(x) dx$ är konvergent så gäller även att $\int_1^\infty f(x) dx$ är konvergent.

4. Låt $f(x) = \ln(1+x)$. Vi har att

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

och därmed en Taylors formel är

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\alpha)^3},$$

där α är mellan 0 och x .

Alltså gäller att

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| = \left| \frac{x^3}{3(1+\alpha)^3} \right| \leq \left| \frac{x^3}{3(1-1/2)^3} \right| = \frac{8|x|^3}{3}.$$

5. Vi har att

$$\frac{e^{ax} - 1}{x} = a \frac{e^{ax} - 1}{ax} \rightarrow a,$$

då $x \rightarrow 0+$.

Alltså måste $a = b$.

Vi har även att

$$\arctan \frac{a}{x^2} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

eftersom $a > 0$. Vi har därför att $a = b = \pi/2$.

6. Se boken.

7. Vi nyttjar partiell integration, polynomdivision och partialbråksuppdelning för att få

$$\begin{aligned} \int_4^5 \ln(x^2 - 3x + 2) dx &= [x \ln(x^2 - 3x + 2)]_4^5 - \int_4^5 \frac{x(2x - 3)}{x^2 - 3x + 2} dx \\ &= 5 \ln 12 - 4 \ln 6 - \int_4^5 \left(2 + \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2} \right) dx \\ &= 6 \ln 2 + \ln 3 - 2 - \int_4^5 \left(\frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} \right) dx \\ &= 6 \ln 2 + \ln 3 - 2 - [2 \ln(x - 2) + \ln(x - 1)]_4^5 \\ &= 6 \ln 2 + \ln 3 - 2 - 2 \ln 3 - 2 \ln 2 + 2 \ln 2 + \ln 3 \\ &= 6 \ln 2 - 2 \end{aligned}$$

8. Vi utför ett motsägelsebevis. Antag att f har två nollställen x_1 och x_2 . Vi kan anta att $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ och att f inte har något nollställe mellan x_1 och x_2 . Vi kan även anta att $f(x) > 0$ för alla $x \in (x_1, x_2)$, fallet $f(x) < 0$ är analogt.

Enligt villkoret på f så är $f'(x_1) > 1$ och $f'(x_2) < -1$. Enligt Rolles sats så finns det ett $\alpha \in (x_1, x_2)$ så att $f'(\alpha) = 0$ och från villkoret för uppgiften måste därför $\beta := f(\alpha) > 1$.

Enligt medelvärdessatsen för derivator gäller att det finns två punkter $\alpha_1 \in (x_1, \alpha)$ så att $f'(\alpha_1) = \beta/(\alpha - x_1)$ och $\alpha_2 \in (\alpha, x_2)$ så att $f'(\alpha_2) = -\beta/(x_2 - \alpha)$.

Vi får att

$$\max\{|f'(\alpha_1)|, |f'(\alpha_2)|\} = \beta \max\left\{\frac{1}{\alpha - x_1}, \frac{1}{x_2 - \alpha}\right\} \geq 2\beta > 2$$

vilket motsäger att $|f'(x)| < 2$ för alla $x \in [0, 1]$.

Statistik

poäng	antal	procent
0	5	
1	0	
2	4	
3	3	
4	0	
5	2	
6	2	
7	2	
8	6	
9	3	
10	5	
11	4	
12	2	
13	3	
14	3	
15	10	
16	3	62%
17	2	
18	5	
19	5	54%
20	6	
21	7	
22	6	42%
23	3	
24	4	
25	6	32%
26	3	
27	7	
28	4	21%
29	5	
30	6	
31	4	
32	3	
33	5	
34	2	