



Tentamen i kursen SF1673

Datum: 2018-04-03

Skrivtid: 8:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x) = x^3 + 12|x|$ för $x \in [-3, 2]$.

2. Visa att

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{x+2} < \frac{\pi}{2},$$

för alla $x > 0$.

3. Avgör om funktionen $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x - x^3/3 + x^4$ har ett extremvärde i $x = 0$.

4. Visa att

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = 2 \left(g(\sqrt{2}) - g(1) \right),$$

där

$$g(x) = \int_0^x \sin t^2 dt.$$

5. Bestäm en partikulärlösning till $y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x^2 - x + 30 \sin(2x)$.

6. (a) Definiera begreppet konvergent talföljd.

(b) Visa med hjälp av definitionen i (a) att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ som ges av

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{n + n^2}$$

konvergerar mot 2.

7. Bestäm de $a, b \in \mathbb{R}$ för vilka

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{x(b-a)}}{x^a} dx$$

är konvergent.

8. Låt $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Visa att

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

En ledning är att använda Riemann-summor och att använda olikheten

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

för alla $a, b \in \mathbb{R}$.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!

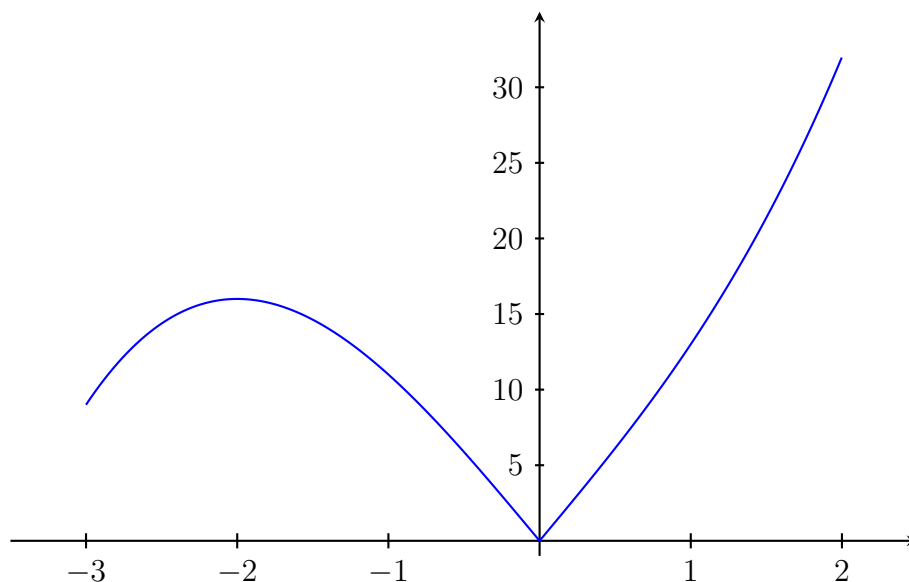
Lösningar till tentamen i kursen SF1673 - 2018-04-03

1. Vi börjar med att bestämma värdena för f i ej deriverbara punkter och ändpunkter. Vi har att $f(-3) = 9$, $f(2) = 32$ och $f(0) = 0$.

Om $x < 0$ gäller att $f'(x) = 3x^2 - 12$. Alltså är $f'(x) = 0$ om och endast om $x = -2$. Vi har $f(-2) = 16$.

Om $x > 0$ gäller att $f'(x) = 3x^2 + 12 > 0$.

Vi har att det största värdet av f är 32 och det minsta är 0.



2. Bilda

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x+2}.$$

Vi vill visa att $f(x) > 0$ för alla $x > 0$. Vi har att

$$f'(x) = -\frac{1}{2+x^2/2} + \frac{2}{(2+x)^2} = \frac{2(2+x^2/2) - (2+x)^2}{(2+x^2/2)(2+x)^2} = \frac{-4x}{(2+x^2/2)(2+x)^2}.$$

Detta visar att $f'(x) < 0$ för varje $x > 0$ och tillsammans med

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

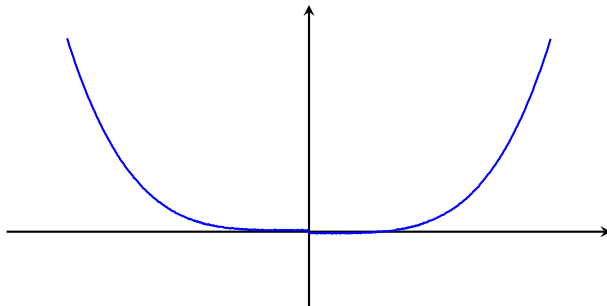
är det klart att $f(x) > 0$, då $x > 0$.

3. Vi har att $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2 + 4x^3$ och därmed att $f'(0) = 0$, vilket ger att 0 är en stationär punkt. Eftersom $f''(x) = e^x - e^{-x} - 2x + 12x^2$ och $f''(0) = 0$ så vet vi inget om huruvida f har ett extremvärde i 0.

Vi får nyttja Taylorutveckling. Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + O(x^5) - 1 + x - x^2/2 + x^3/6 - x^4/24 - 2x - x^3/3 + x^4 \\ &= x^4 + O(x^5) = x^4(1 + O(x)) \end{aligned}$$

och därmed att f har ett lokalt minimum i $x = 0$.



4. Vi utför variabelbytet $x = t^2$ och får

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} 2 \sin t^2 dt \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \sin t^2 dt - 2 \int_0^1 \sin t^2 dt \\ &= g(\sqrt{2}) - g(1). \end{aligned}$$

5. Vi börjar med att bestämma en partikulärlösning till $y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x^2 - x$ och därefter till $y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 30 \sin(2x)$.

Ansätt $y_1(x) = ax^2 + bx + c$. Vi får efter insättning

$$2a + 3(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 - x$$

vilket ger att $a = 1$, $b = -7$ och $c = 19$ och $y_1(x) = x^2 - 7x + 19$.

Ansätt $y_2(x) = d \cos(2x) + e \sin(2x)$. Vi får efter insättning

$$y_2''(x) + 3y_2'(x) + y_2(x) = (-4d + 6e + d) \cos(2x) + (-4e - 6d + e) \sin(2x) = 2 \sin(2x)$$

Alltså har vi att $-3d + 6e = 0$ och $-3e - 6d = 30$ vilket är detsamma som $d = -4$ och $e = -2$. Vi får $y_2(x) = -4 \cos(2x) - 2 \sin(2x)$.

En partikulärlösningen är därmed $y_p(x) = x^2 - 7x + 19 - 4 \cos(2x) - 2 \sin(2x)$.

6. (a) Se boken.

(b) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att

$$\left| \frac{2n^2 + 1}{n + n^2} - 2 \right| < \varepsilon$$

för varje $n > N$. Vi har för stora n att

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n^2 + 1}{n + n^2} - 2 \right| &= \left| \frac{2n^2 + 1 - 2n - 2n^2}{n + n^2} \right| \\ &= \frac{2n - 1}{n + n^2} \leq \frac{2n}{n + n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

givet att $n > 2/\varepsilon$. Välj därför $N = 2/\varepsilon$.

7. Om $a > b$ gäller att

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{e^{x(b-a)}}{x^a} dx &\leq \int_1^R e^{x(b-a)} dx = \left[\frac{e^{x(b-a)}}{b-a} \right]_1^R \\ &= \frac{1}{b-a} (e^{R(b-a)} - e^{b-a}) \rightarrow \frac{e^{b-a}}{a-b}, \end{aligned}$$

då $R \rightarrow \infty$.

Om $a = b$ gäller att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$$

är konvergent om och endast om $a > 1$.

Om $a < b$ gäller att integranden växer mot oändligheten

$$\frac{e^{x(b-a)}}{x^a} \rightarrow \infty,$$

då $x \rightarrow \infty$. Därmed kan inte integralen vara konvergent.

8. Vi använder oss av Riemannsummor. Låt

$$(0, 1/n, 2/n, \dots, 1)$$

vara en uppdelning av $[0, 1]$. Då f och $x \mapsto x^2$ är kontinuerliga följer att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{f(j/n)}{n} \right)^2 = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{f(j/n)^2}{n} = \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

Olikheten följer om vi lyckas visa att

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{f(j/n)}{n}\right)^2 \leq \sum_{j=1}^n \frac{f(j/n)^2}{n}.$$

Eftersom $2ab \leq a^2 + b^2$, för alla $a, b \in \mathbb{R}$ har vi att

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \frac{f(j/n)}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(i/n)f(j/n) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n f(i/n)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 2f(i/n)f(j/n) \right) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n f(i/n)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (f(i/n)^2 + f(j/n)^2) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{f(j/n)^2}{n}. \end{aligned}$$

Vi är klara.

Beviset är lättare att följa om man har ett specialfall med sig i tankarna. Studera därför fallet då $n = 3$ och låt $a_1 = f(1/3)$, $a_2 = f(2/3)$ och $a_3 = f(1)$. Vi vill visa att

$$(a_1/3 + a_2/3 + a_3/3)^2 \leq a_1^2/3 + a_2^2/3 + a_3^2/3.$$

Räkningarna är enklare att följa och lyder

$$\begin{aligned} (a_1/3 + a_2/3 + a_3/3)^2 &= \frac{1}{9} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3) \\ &\leq \frac{1}{9} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)) \\ &= a_1^2/3 + a_2^2/3 + a_3^2/3. \end{aligned}$$