



Tentamen i kursen SF1673

Datum: 2018-01-12

Skrivtid: 14:00 – 19:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Redogör för vilka av följande serier/integraler som är konvergenta

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{j^4+1},$

(c) $\int_{42}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x},$

(b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx,$

(d) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2 \arctan(j)+j}{j^2+\sin(j)}.$

2. Låt $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vara sådan att

$$\ln x - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \ln x + \frac{1}{x},$$

för alla $x > 1$. Bestäm gränsvärdet av $f(2x) - f(x)$, då $x \rightarrow \infty$.

3. Låt $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = x^2 - 2\}$.

(a) Skissa gärna mängden M . Bestäm de punkter i mängden M som ligger närmast origo.

(b) Visa att minsta avståndet från M till origo är $\sqrt{7}/2$.

4. Låt φ vara en kontinuerlig funktion, definierad för alla reella tal x . För varje heltal $n > 0$ definierar vi intervallet $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Vi låter φ_n vara det största värdet funktionen φ har på intervallet I_n . Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$

existerar, och bestäm detta värde.

5. (a) Ange definitionen av att en funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ har en stationär punkt i $x_0 \in (a, b)$.
(b) Visa att funktionen $f(x) = e^{2x} - \sin(2x) + \cos(2x)$ har en stationär punkt i $x = 0$.
(c) Redogör för huruvida f har ett lokalt extremvärde i $x = 0$.
6. (a) Ange definitionen för att en funktion $f(x) \rightarrow A$, då $x \rightarrow \infty$.
(b) Visa att om en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i en punkt a så är den kontinuerlig i a .

7. Beräkna integralen

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$$

genom att utföra variabelbytet $\tan(x/2) = t$.

8. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n j \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2.$$

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!

Lösningar till tentamen i kursen SF1673 - 2018-01-12

1. (a) Konvergent genom jämförelse med serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2},$$

ty serien är positiv och

$$\frac{j^2/(j^4 + 1)}{1/j^2} \rightarrow 1,$$

då $j \rightarrow \infty$.

- (b) Konvergent genom jämförelse med funktionen 1, eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{1} = 1,$$

funktionen $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ är positiv och

$$\int_0^1 1 \, dx$$

är konvergent.

- (c) Divergent, ty genom variabelbytet $t = \ln x$ har vi

$$\int_{42}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 42}^{\infty} \frac{dt}{t},$$

som är divergent.

- (d) Divergent, eftersom termerna i serien inte går mot noll. Vi har $\frac{j^2 \arctan(j) + j}{j^2 + \sin(j)} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, då $j \rightarrow \infty$.

2. Vi har att

$$f(2x) - f(x) \leq \ln 2x + \frac{1}{2x} - \ln x + \frac{1}{x} = \ln 2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \rightarrow \ln 2,$$

och att

$$f(2x) - f(x) \geq \ln 2x - \frac{1}{2x} - \ln x - \frac{1}{x} = \ln 2 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} \rightarrow \ln 2.$$

Alltså följer att $f(2x) - f(x) \rightarrow \ln 2$, då $x \rightarrow \infty$.

3. (a) Avståndet mellan (x, y) och origo ges av $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ som med relationen $y = x^2 - 2$ kan skrivas som en envariabelfunktion

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 2)^2}.$$

För att förenkla räkningar, så studerar vi minimum av funktionen $D(x) = d(x)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$. Vi får att $D'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{3}/\sqrt{2}$.

Vi får att $D(0) = 4$ och att $D(\pm\sqrt{3}/\sqrt{2}) = 7/4$. Eftersom funktionen är deriverbar och $D(x) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow \pm\infty$ så har vi att $(\pm\sqrt{3}/\sqrt{2}, -1/2)$ är de punkter i M som ligger närmast origo.

- (b) Avståndet är $d(\pm\sqrt{3}/\sqrt{2}) = \sqrt{7}/2$.

4. För varje n är funktionen φ kontinuerlig på intervallet I_n , och därför finns det $x_n \in I_n$ sådan att $\varphi(x_n) = \varphi_n$ är det största värdet på I_n . Vi har att sekvensen (x_n) har gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Vi söker gränsen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

Funktionen φ är kontinuerlig, vilket betyder att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \varphi(0).$$

Detta betyder att gränsen existerar, och är lika med $\varphi(0)$.

5. (a) Se boken

(b) Vi har att $f'(x) = 2e^{2x} - 2\cos(2x) - 2\sin(2x)$. Nu har vi att $f'(0) = 0$.

(c) Genom att Taylorutveckla kring $x = 0$ så får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + O(x^4) - 2x + \frac{(2x)^3}{3!} + 1 - \frac{(2x)^2}{2} \\ &= 2 + \frac{8x^3}{3} + O(x^4). \end{aligned}$$

Alltså saknas extremvärde.

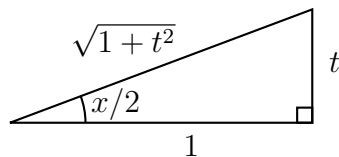
6. (a) Se boken

(b) Se boken

7. Variabelbytet $t = \tan(x/2)$ ger att $x = 2 \arctan t$ och

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Genom relationerna från triangeln



får vi att $\sin(x/2) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ och därmed är

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Alltså följer att

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

8. Låt $0 \leq x < 1$. Vi utgår från en geometrisk summa

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Derivation ger

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Låt oss multiplicera med x och därefter låta $n \rightarrow \infty$. Vi får

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Låt nu $x = 1/2$, vi får då

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2.$$