



KTH Teknikvetenskap

FLERVARIABELANALYS

SF1674

TOMAS EKHOLM

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK

2 februari 2025

Innehåll

0	Satser från envariabelanalys och linjär algebra	4
0.1	Funktioner	4
0.2	Kontinuerliga funktioner	4
1	Vektorer och mängder i $\mathbb{R}^n$	5
1.1	Vektorer i $\mathbb{R}^n$	5
1.2	Mängder i $\mathbb{R}^n$	8
1.3	Övningar	9
2	Gränsvärden och kontinuitet	10
2.1	Funktioner i $\mathbb{R}^n$	10
2.2	Lokala gränsvärden	10
2.3	kontinuitet	14
2.4	Övningar	15
3	Partiella derivator, differentierbarhet och klassen C^1	17
3.1	Partiella derivator	17
3.2	Differentierbarhet	17
3.3	Klassen C^k	20
3.4	Övningar	20
4	Kedjeregeln och partiella differentialekvationer	21
4.1	Kedjeregeln	21
4.2	Partiella differentialekvationer	24
4.3	Högre ordningens derivator	26
4.4	Övningar	30
5	Riktningsderivata och Gradient	32
5.1	Riktningsderivata	32
5.2	Nivåytor och nivåkurvor	34
5.3	Övningar	35
6	Taylors formel och lokala extrempunkter	36
6.1	Taylors formel	36
6.2	Lokala extrempunkter	37
6.3	Övningar	41
7	Kurvor och ytor på parameterform	42
7.1	Kurvor på parameterform	42
7.2	Längd av kurvor	43
7.3	Ytor på parameterform	44
8	Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$	46
8.1	Funktionalmatris	46
8.2	Funktionaldeterminanter	48
8.3	Inversa funktionssatsen	49

9	Implicita funktionssatsen och optimering på kompakta mängder	50
9.1	Implicita funktionssatsen	50
9.2	Optimering av kontinuerliga funktioner på kompakta mängder	54
9.3	Optimering av kontinuerliga funktioner på icke-kompakta mängder	55
9.4	Övningar	57
10	Optimering med bivillkor	58
10.1	Inledande exempel i $\mathbb{R}^2$	58
10.2	Bivillkor i $\mathbb{R}^3$	59
10.3	Allmänna fallet	59
10.4	Övningar	60
11	Integration över rektanglar	61
11.1	Dubbelintegraler av enkla funktioner	61
11.2	Integration över rektanglar	62
12	Integration över begränsade mängder	67
13	Riemannsummor och variabelbyten i integratler	69
13.1	Riemannsummor	69
13.2	Variabelbyten i integraler	70
13.3	Övningar	71
14	Generaliserade integraler	72
14.1	Generaliserade integraler	72
14.2	Övningar	74
15	Multipelintegraler och tillämpningar	75
15.1	Multipelintegraler	75
15.2	Densitet	76
15.3	Area av ytor	76
15.4	Övningar	78
16	Kurvintegraler och Greens formel	80
16.1	Kurvintegraler	80
16.2	Greens formel	82
16.3	Area med Greens formel	83
16.4	Flödesintegraler	83
16.5	Övningar	84
17	Potentialer	85
17.1	Övningar	87
18	Flödesintegraler i $\mathbb{R}^3$ och divergenssatsen	88
18.1	Flödesintegraler i $\mathbb{R}^3$	88
18.2	Divergenssatsen	89

18.3	Övningar	90
19	Stokes sats	92
19.1	Övningar	93
20	Teorifrågor	94
21	Svar till övningar	96

Föreläsningsplan

Nr	Namn	Avsnitt	Uppgifter
1	Mängder och vektorer i $\mathbb{R}^n$,	1.1 – 1.4	1.2, 1.6, 1.7, 1.8, 1.11, 1.13, 1.17, 1.20
2	Gränsvärden och kontinuitet	1.5 – 1.6	1.24, 1.25, 1.27, 1.28, 1.29, 1.31
3	Partiella derivator, differentierbarhet och klassen C^1	2.1 – 2.2	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 2.8, 2.11, 2.12
4	Kedjeregeln och Partiella differentialekvationer	2.3, 2.5	2.14, 2.16, 2.18, 2.20, 2.23, 2.24, 2.25 2.50, 2.52, 2.55, 2.56, 2.58, 2.59
5	Gradient och riktningsderivata	2.4	2.28, 2.30, 2.32, 2.39, 2.41, 2.42
6	Taylors formel & Lokala extrempunkter	2.6	2.60, 2.61, 2.62, 2.63, 2.67, 2.68, 2.70, 2.81
7	Kurvor och ytor	3.1	3.1, 3.3, 3.7
8	Funktionalmatriser och funktionaldeterminanter	3.2 – 3.3	3.9, 3.10, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.18, 3.21
9	Implicita funktioner och optimering på kompakta områden	3.4, 4.1	3.23, 3.24, 3.26, 3.29, 3.31, 3.32, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.9, 4.10, 4.15
10	Optimering med bivillkor	4.2 – 4.3	4.17, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.30, 4.32, 4.33
11	Integraler över rektanglar	6.1	6.1, 6.2, 6.4, 6.5
12	Integration över godtyckliga områden	6.2	6.10, 6.11, 6.13, 6.15, 6.17
13	Variabelbyten i integraler	6.3 – 6.4	6.19, 6.21, 6.23, 6.25, 6.26, 6.28
14	Generaliserade integraler	6.6	6.33, 6.36, 6.37, 6.41
15	Multipelintegraler & tillämpningar	7.1 – 7.2 8.1 – 8.2	7.1, 7.4, 7.7, 7.11, 7.15, 8.2, 8.3, 8.6, 8.14, 8.16
16	Kurvintegraler och Greens formel	9.1 – 9.3	9.1, 9.4, 9.5, 9.6, 9.13, 9.17, 9.21, 9.23, 9.24
17	Potentialer och exakta vektorfält	9.4	9.29, 9.30, 9.31, 9.32, 9.36
18	Ytintegraler och Divergenssatsen	10.1 – 10.2	10.1, 10.2, 10.7, 10.11, 10.12, 10.14, 10.16, 10.17, 10.18, 10.19
19	Stokes' sats	10.3	10.53, 10.54
20	Repetition 1		
21	Repetition 2		

Avsnitt är från Analys i flera variabler, Arne Persson, Lars-Christer Böiers, 3:e upplagan

Uppgifter är från Övningar i analys i flera variabler, 8:e upplagan

0 Satser från envariabelanalys och linjär algebra

Här följer satser som vi kommer att nyttja i denna kurs. De beskrivs här så att vi kan enkelt hänvisa till dem.

0.1 Funktioner

Definition 0.1. Låt X och Y vara mängder. En **funktion** $f: X \rightarrow Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi skriver $f(x) = y$. Vi säger att x **avbildas** på y och att y är **bilden** av x . Elementet x kallas **argument** till f . Mängderna X och Y kallas **definitions-mängd** respektive **målmängd**. För definitionsmängden för f används även beteckningen D_f . **Värdemängden** till en funktion $f: X \rightarrow Y$ definieras som

$$V_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}.$$

Definition 0.2. En funktion $f: X \rightarrow Y$ säges vara **injektiv** om det för varje $x, y \in X$ gäller att om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$.

Definition 0.3. En funktion $f: X \rightarrow Y$ säges vara **surjektiv** om $V_f = Y$.

Definition 0.4. En funktion $f: X \rightarrow Y$ som både är injektiv och surjektiv säges vara **bijektiv**, eller en **bijektion**.

0.2 Kontinuerliga funktioner

Sats 0.5 (Satsen om mellanliggande värde). *Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.*

1 Vektorer och mängder i $\mathbb{R}^n$

1.1 Vektorer i $\mathbb{R}^n$

Vi börjar med att repetera delar som introducerats i kurser i Linjär algebra. Att $x \in \mathbb{R}^n$ betyder att $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, där $x_j \in \mathbb{R}$ för varje $1 \leq j \leq n$.

Vi definierar

- **addition** av $x, y \in \mathbb{R}^n$ enligt

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (1.1)$$

- **multiplikation med skalär** $s \in \mathbb{R}$ enligt

$$sx = (sx_1, sx_2, \dots, sx_n), \quad (1.2)$$

- **skalärprodukten** enligt

$$x \cdot y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n), \quad (1.3)$$

- **längden** enligt

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (1.4)$$

Notera att $|x|^2 = x \cdot x$.

Exempel 1.1. Låt $x = (1, 4, -3, 0)$ och $y = (-2, 1, 2, 6)$.

Då är $x + y = (-1, 5, -1, 6)$, $3x = (3, 12, -9, 0)$, $x \cdot y = -2 + 4 - 6 + 0 = -4$ och $|x| = \sqrt{1 + 16 + 9 + 0} = \sqrt{26}$. ▲

Sats 1.2 (Cauchy-Schwarz olikhet). Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|x \cdot y| \leq |x||y|. \quad (1.5)$$

Likhet gäller om och endast om x och y är linjärt beroende.

BEVIS: Om $x = 0$ är satsen klar eftersom både höger- och vänsterled är noll.

Antag att $x \neq 0$. För varje $t \in \mathbb{R}$ gäller att $|tx + y|^2 \geq 0$. Alltså har vi via kvadratkomplettering

$$\begin{aligned} 0 \leq |tx + y|^2 &= (tx + y) \cdot (tx + y) = t^2|x|^2 + 2t(x \cdot y) + |y|^2 \\ &= \left(t|x| + \frac{(x \cdot y)}{|x|}\right)^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2} + |y|^2. \end{aligned}$$

Speciellt gäller olikheten för $t_0 = -\frac{(x \cdot y)}{|x|^2}$ som gör att den första termen försvinner. Kvar har vi

$$0 \leq -\frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2} + |y|^2,$$

vilket omskrivet är samma sak som

$$|x \cdot y| \leq |x||y|, \quad (1.6)$$

vilket visar olikheten.

För att visa att likhet gäller om och endast om x och y är linjärt beroende så låter vi $u_0 = t_0x + y$ och noterar att

$$0 \leq |u_0|^2 = \frac{1}{|x|^2} (|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2).$$

Nu har vi att $|x||y| = x \cdot y$ om och endast om $u_0 = 0$. Att $u_0 = 0$ är detsamma som $t_0x + y = 0$ vilket enligt definitionen betyder att x och y är linjärt beroende. ■

Vinkeln mellan $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieras som

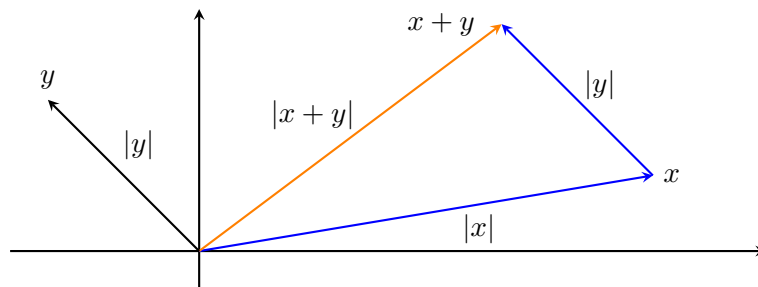
$$\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right). \quad (1.7)$$

Notera att uttrycket är väldefinierat från sats 1.2 och att $0 \leq \theta \leq \pi$.

Sats 1.3 (Triangelolikheten). *Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att*

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (1.8)$$

Likhet gäller om och endast om x är i samma riktning som y .



BEVIS: Med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet får vi

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = |x|^2 + 2(x \cdot y) + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Likhet gäller om och endast om $x \cdot y = |x||y|$ vilket sker om och endast om x och y har samma riktning, eftersom om x och y uppfyller $x = -ky$, där $k > 0$ och $x, y \neq 0$ så är $x \cdot y = -k(y \cdot y) = -k|y|^2 < 0$ medan $|x||y| = k|y|^2 > 0$. ■

Sats 1.4 (Omvända triangelolikheten). *Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att*

$$||x| - |y|| \leq |x + y|. \quad (1.9)$$

BEVIS: Från triangelolikheten får vi

$$|x| = |x + y - y| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$$

och av symmetriskäl har vi även

$$|y| = |x + y + (-x)| \leq |x + y| + |-x| = |x + y| + |x|$$

Tillsammans blir det

$$\begin{cases} |x| - |y| \leq |x + y| \\ |y| - |x| \leq |x + y| \end{cases}$$

vilket är detsamma som

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

■

Sats 1.5. *Låt $x \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att*

$$|x_j| \leq |x| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (1.10)$$

för varje $1 \leq j \leq n$.

BEVIS: Låt oss först visa att $|x_j| \leq |x|$ och konstatera att det räcker att visa olikheten för $j = 1$. Vi får

$$|x_1|^2 = x_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = |x|^2$$

vilket är ekvivalent med $|x_1| \leq |x|$.

För att visa

$$|x| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

använder vi standardbasen i $\mathbb{R}^n$ och skriver

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Vi kan nu succesivt använda triangelolikheten

$$\begin{aligned} |x| &= |x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \dots + x_n e_n| \\ &\leq |x_1| + |x_2 e_2 + x_3 e_3 + \dots + x_n e_n| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + |x_3 e_3 + \dots + x_n e_n| \\ &\leq \dots \\ &\leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n| \end{aligned}$$

vilket visar satsen. ■

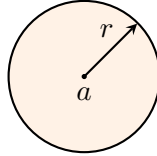
1.2 Mängder i $\mathbb{R}^n$

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Komplementet till Ω betecknar vi med $\Omega^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \Omega\}$.

Mängden

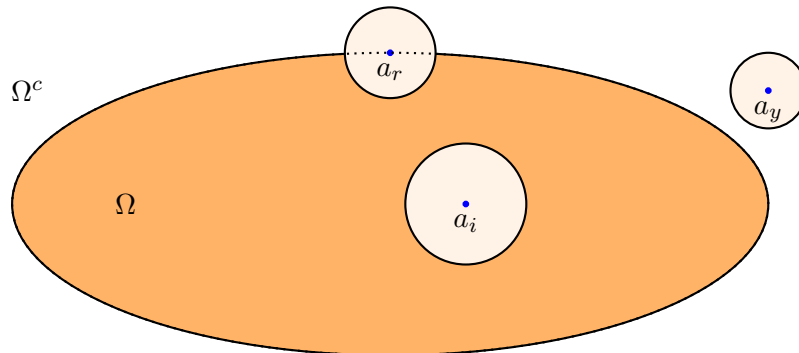
$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\} \quad (1.11)$$

definierar ett **öppet klot** i $\mathbb{R}^n$ med centrum i $a \in \mathbb{R}^n$ och radie $r > 0$.



Definition 1.6. Låt Ω vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En punkt $a \in \mathbb{R}^n$ kallas en

- a) **inre punkt** till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(a)$ sådant att $B_r(a) \subset \Omega$,
- b) **yttre punkt** till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(a)$ sådant att $B_r(a) \subset \Omega^c$,
- c) **randpunkt** till Ω om det för varje öppet klot $B_r(a)$ finns punkter $x \in \Omega$ och $y \in \Omega^c$.



Här är a_i en inre punkt, a_r en randpunkt och a_y en yttre punkt.

Mängden av alla randpunkter betecknas med $\partial\Omega$ och kallas **randen** till Ω .

Definition 1.7. En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara **öppen** om varje punkt i Ω är en inre punkt till Ω . Mängden Ω sägs vara **sluten** om dess komplement Ω^c är öppen.

Notera att tomma mängden $\emptyset$ och hela $\mathbb{R}^n$ både är öppna och slutna.

Definition 1.8. En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara **begränsad** om det existerar ett klot B_r sådant att $\Omega \subset B_r$, annars **obegränsad**.

Definition 1.9. En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara **kompakt** om den är sluten och begränsad.

En **omgivning** M till en punkt $a \in \Omega$ är en mängd sådan att a är en inre punkt till M . En **punkterad omgivning** P fås genom att utgå från en omgivning M till en punkt a och därefter exkludera a , d.v.s. $P = M \setminus \{a\}$.

1.3 Övningar

Övning 1.1. Rita mängden av alla (x, y) som uppfyller

- a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,
- b) $4x^2 + 9y^2 = 36$,
- c) $x^2 + y^2 = 4$,
- d) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

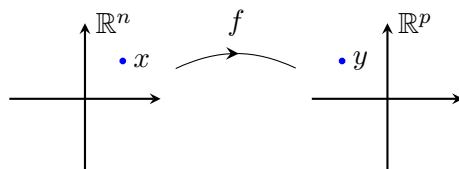
Övning 1.2. Rita följande mängder, samt bestäm randen, inre punkter och avgör om mängden är öppen, sluten eller varken öppen eller sluten. Avgör om den är begränsad och kompakt.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| + |y| < 1\}$,
- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \max(|x|, |y|) \leq 1\}$,
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x + y| \leq 2\}$,
- e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 < 4\}$,
- f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |xy| < 1\}$

2 Gränsvärden och kontinuitet

2.1 Funktioner i $\mathbb{R}^n$

Vi ska nu studera funktioner f från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$, d.v.s. funktioner vars definitionsmängd är en delmängd av $\mathbb{R}^n$ och antar värden i $\mathbb{R}^p$. Vi illustrerar med en bild



Vi har att för varje $x \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ finns ett unikt $y \in \mathbb{R}^p$ och vi använder notationen $y = f(x)$. Vi kan direkt använda begreppet injektivitet, surjektivitet och bijektivitet eftersom de var allmänt definierade.

I fallet $p = 1$ kallas f **reellvärd** och om $p > 1$ kallas f **vektörvärd**. Om $p > 1$ kan vi beskriva

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

där funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_p$ kallas **komponentfunktionerna** till f . En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ kallas en **kurva**.

2.2 Lokala gränsvärden

Definition 2.1. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $a \in \overline{D}$. Vi säger att f **konvergerar mot** $A \in \mathbb{R}^p$ då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett δ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver detta

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

eller $f(x) \rightarrow A$, då $x \rightarrow a$.

Exempel 2.2. Låt oss visa att $|x| \rightarrow 0$, då $x \rightarrow 0$, där $x \in \mathbb{R}^n$.

Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill finna ett δ sådant att $|x| < \varepsilon$ för varje x som uppfyller att $|x| < \delta$. Vi inser att $\delta = \varepsilon$ och vi är klara. $\blacktriangle$

Sats 2.3. Låt $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $g : D_g \subset \mathbb{R}^m \rightarrow D_f$. Om $g(x) \rightarrow b$, då $x \rightarrow a$ och $f(y) \rightarrow A$, då $y \rightarrow b$ så gäller att $f(g(x)) \rightarrow A$, då $x \rightarrow a$.

BEVIS: Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill finna ett δ sådant att

$$|f(g(x)) - A| < \varepsilon \quad (2.1)$$

för varje $x \in D_g$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$.

Eftersom $f(y) \rightarrow A$, då $y \rightarrow b$ så finns det ett δ_f sådant att (2.1) gäller för alla $y = g(x) \in D_f$ sådana att $0 < |y - b| < \delta_f$.

Men, eftersom $g(x) \rightarrow b$, då $x \rightarrow a$ så finns det ett δ sådant att $|y - b| < \delta_f$ gäller för alla $x \in D_g$ sådana att $0 < |x - a| < \delta$. Detta visar satsen. ■

Sats 2.4. Låt f och g vara funktioner från $D \subset \mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$. Låt $f(x) \rightarrow A$ och $g(x) \rightarrow B$, då $x \rightarrow a$. Då gäller att

- a) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$, då $x \rightarrow a$,
- b) $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$, då $x \rightarrow a$,
- c) om $p = 1$ och $B \neq 0$ så följer att $f(x)/g(x) \rightarrow A/B$, då $x \rightarrow a$,
- d) om $p = 1$ och $f(x) \leq g(x)$ för varje x i en punkterad omgivning av a så följer att $A \leq B$.

Beviset är nästan identiskt med det för envariabelanalysen och lämnas som en övning.

Sats 2.5 (Instängningssatsen). Låt f , g och h vara reellvärda funktioner definierade i en punkterad omgivning D av a . Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, för varje $x \in D$ och

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \quad (2.2)$$

så gäller att $g(x) \rightarrow A$, då $x \rightarrow a$.

BEVIS: Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett δ sådant att $|g(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x \in D$ som uppfyller att $|x - a| < \delta$.

Vi noterar att det finns ett δ_h sådant att

$$g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon \quad (2.3)$$

och ett δ_f sådant att

$$g(x) \geq f(x) > A - \varepsilon, \quad (2.4)$$

för varje $x \in D$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_f, \delta_h\}$. Alltså är vi klara. ■

Exempel 2.6. Låt oss exemplifiera sats 2.5 genom att visa att $x_i \rightarrow 0$, då $x \rightarrow 0$, där $x \in \mathbb{R}^n$. Vi får

$$-|x| \leq x_i \leq |x|,$$

och eftersom $|x| \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ följer vårt resultat. ▲

Exempel 2.7. Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|^2}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3}$$

existerar och beräkna i så fall dess värde. Här är $x = (x_1, x_2, x_3)$.

LÖSNING: Notera att

$$\frac{\sin |x|^2}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3} = \frac{\sin |x|^2}{|x|^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2}}$$

och från sats 2.5 har vi

$$\left| \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{|x|^2} = |x| \rightarrow 0,$$

då $x \rightarrow 0$.

Vi kan nu nyttja sats 2.4 a), b) och c) för att fastställa att

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|^2}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|^2}{|x|^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2}} = 1. \end{aligned}$$

▲

Låt oss gå igenom ett viktigt exempel.

Exempel 2.8. Låt

$$g(r, \theta) = \frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta},$$

för $r > 0$ och $\theta \in [0, 2\pi)$. Om $\sin \theta = 0$ så följer att $g(r, \theta) = 0$. Om $\sin \theta \neq 0$ så följer att

$$g(r, \theta) \rightarrow \frac{0}{0 + \sin^2 \theta} = 0,$$

då $r \rightarrow 0$. Alltså finns det endimensionella gränsvärdet

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r, \theta) = 0.$$

Låt oss nu visa att

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

saknar gränsvärde då $(x, y) \rightarrow 0$. Detta inses genom att $f(0, t) = 0$ för alla $t \neq 0$ medan

$$f(t, t^2) = \frac{t^4}{2t^4} = 1/2,$$

för alla $t \neq 0$.

Notera nu att om $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ så följer att $f(x, y) = g(r, \theta)$. Vi kan med andra ord inte bestämma gränsvärdet

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

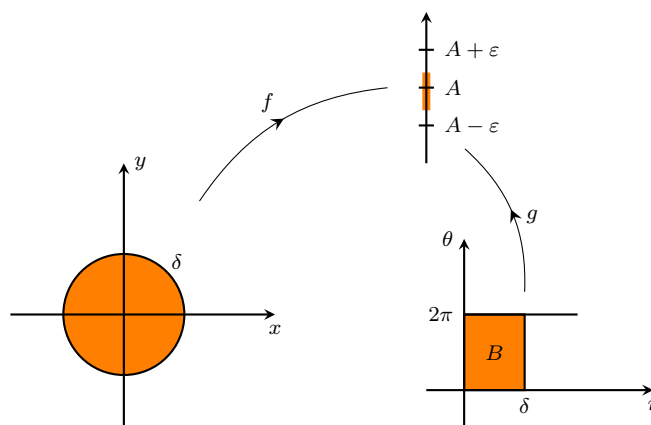
genom att beräkna

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r, \theta).$$

Om

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = A$$

så betyder det att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett δ sådant att $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ för varje (x, y) som uppfyller $0 < |(x, y) - (0, 0)| < \delta$, eller i (r, θ) -planet $0 < r < \delta$. Låt oss illustrera detta med en bild



Vi måste alltså garantera att alla punkter i B avbildas innanför vårt intervall $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. ▲

Vi sammanställer resultatet i en sats.

Sats 2.9. Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vara en omgivning kring origo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ och låt

$$|f(x) - A| \leq M(|x|) \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

då $|x| \rightarrow 0$. Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A.$$

BEVIS: Tag $\varepsilon > 0$. Enligt definitionen vill vi finna ett δ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje x som uppfyller att $0 < |x| < \delta$.

Enligt (2.5) kan vi för varje (och i synnerhet för vårt givna) $\varepsilon > 0$ finna ett δ sådant att det endimensionella gränsvärdet $|M(r)| < \varepsilon$ för varje r som uppfyller att $0 < |r| < \delta$. Detta δ duger för oss, ty om $0 < |x| < \delta$ så följer att

$$|f(x) - A| \leq M(|x|) < \varepsilon$$

och vi är klara. ■

Exempel 2.10. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2).$$

LÖSNING: Låt oss nyttja polära koordinater. Notera att

$$(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = r^2 \ln r^2$$

och från envariabelanalysen har vi att $t \ln t \rightarrow 0$, då $t \rightarrow 0+$. Vi kan nu använda sats 2.9. Eftersom

$$|(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) - 0| = |r^2 \ln r^2| \rightarrow 0,$$

då $r \rightarrow 0$ så gäller att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0.$$

▲

2.3 kontinuitet

Definition 2.11. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $a \in D$. Vi säger att f är **kontinuerlig** i a om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \tag{2.6}$$

Sats 2.12. Låt $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ vara kontinuerlig i b , $g : D_g \subset \mathbb{R}^m \rightarrow D_f$ vara kontinuerlig i a och låt $b = g(a)$. Då är sammansättningen $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^p$ kontinuerlig i a .

Sats följer direkt från sats 2.3 och lämnas som en övning för läsaren.

Sats 2.13. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, med $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $a \in D$. Då gäller att f är kontinuerlig i $a \in D$ om och endast om alla $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga i a , där $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$.

BEVIS: Låt oss först visa att om f är kontinuerlig i a så är f_j är kontinuerlig i a . Vi vill visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett δ sådant att $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$ för varje $x \in D$ som uppfyller $|x - a| < \delta$. Tag därför ett $\varepsilon > 0$, vi får från sats 1.5 att

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leq |f(x) - f(a)|$$

och eftersom f är kontinuerlig i a så finns det ett δ sådant att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ för varje $x \in D$ som uppfyller $|x - a| < \delta$.

Låt oss nu betrakta omvändningen. Anta nu att alla f_j är kontinuerliga i a . Vi vill visa att då är f kontinuerlig i a . Tag $\varepsilon > 0$ och återigen genom att nyttja sats 1.5 får vi att

$$|f(x) - f(a)| \leq \sum_{j=1}^p |f_j(x) - f_j(a)|$$

och eftersom alla dessa f_j är kontinuerliga så finns det ett δ sådant att $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon/p$ för varje $x \in D$ som uppfyller $|x - a| < \delta$. För dessa x gäller även att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ och vi är klara. ■

Sats 2.14. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och $D \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt. Då har f ett största och minsta värde på D .

Definition 2.15. En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara **bågvis sammanhängande** om det för varje $a, b \in \Omega$ finns en kontinuerlig kurva $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ sådan att $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ och $\gamma(t) \in \Omega$ för varje $t \in [\alpha, \beta]$.

Sats 2.16 (Satsen om mellanliggande värde). Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en bågvis sammanhängande mängd och låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Om f antar två värden $f(a)$ och $f(b)$ så antar f alla värden mellan dessa.

BEVIS: Låt $a, b \in D$. Eftersom D är bågvis sammanhängande så finns det en kontinuerlig kurva $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ sådan att $\gamma(\alpha) = a$ och $\gamma(\beta) = b$. Bilda nu $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, som $g(t) = f(\gamma(t))$. Eftersom sammansättning av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig är g en kontinuerlig reellvärd funktion av en variabel som antar värdena $f(a) = f(\gamma(\alpha))$ och $f(b) = f(\gamma(\beta))$. Satsen följer nu från satsen om mellanliggande värde inom envariabelanalysen, se Sats 0.5. ■

2.4 Övningar

Övning 2.1. Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sådan att $f(x) = x_1 x_2$. Visa med hjälp av definitionen att $f(x) \rightarrow 0$, då $x \rightarrow 0$.

Övning 2.2. [2022-06-08, uppgift 1, 59%] Beräkna följande gränsvärden eller förklara varför de inte existerar

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + |x|^2)}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3},$$

där $x = (x_1, x_2, x_3)$,

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4}$$

3 Partiella derivator, differentierbarhet och klassen C^1

3.1 Partiella derivator

Definition 3.1. Låt f vara en reellvärd funktion definierad på $D \subset \mathbb{R}^n$, a vara en inre punkt i D och låt $\{e_j\}_{j=1}^n$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^n$. Vi säger att f vara **partiellt deriverbar med avseende på x_j** i punkten a om gränsvärdet

$$f'_{x_j}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + e_j h) - f(a)}{h} \quad (3.1)$$

existerar. Om f är partiellt deriverbar med avseende på alla sina variabler säger vi att f är **partiellt deriverbar**.

Exempel 3.2. Låt $f(x, y) = x^2 \sin y$. Då får vi att $f'_x(x, y) = 2x \sin y$ och $f'_y(x, y) = x^2 \cos y$. ▲

Definition 3.3. Låt f vara en partiellt deriverbar funktion definierad på en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi definierar **gradienten** av f som funktionen

$$(\nabla f)(x) := (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_n(x)). \quad (3.2)$$

Exempel 3.4. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. Då får vi

$$(\nabla f)(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = (2x, 2y) = 2(x, y). \quad (3.3)$$

▲

3.2 Differentierbarhet

Definition 3.5. Låt f vara en reellvärd funktion definierad på $D \subset \mathbb{R}^n$, a vara en inre punkt i D . Vi säger att f är **differentierbar** i a om det finns reella konstanter $A_1, A_2, \dots, A_n$ och en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att

$$f(a + h) - f(a) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + |h| \rho(h) \quad (3.4)$$

och

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0. \quad (3.5)$$

Om f är differentierbar i varje punkt i D säger vi att f är **differentierbar**.

Exempel 3.6. Låt oss visa att $f(x, y) = xy$ är differentierbar. Tag en punkt $a \in \mathbb{R}^n$. Vi får

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) - a_1 a_2 \\ &= a_1 h_2 + a_2 h_1 + h_1 h_2 \\ &= a_1 h_2 + a_2 h_1 + |h| \frac{h_1 h_2}{|h|}. \end{aligned}$$

Vilket är på formen (3.4) med

$$\rho(h) = \frac{h_1 h_2}{|h|}. \quad (3.6)$$

Det återstår att visa att (3.5) gäller. Eftersom $|h_1| \leq |h|$ får vi

$$|\rho(h)| = \frac{|h_1||h_2|}{|h|} \leq \frac{|h||h|}{|h|} = |h| \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

då $h \rightarrow 0$. ▲

I en variabel beskriver derivatan i en punkt riktningen på den tangent som går genom punkten. Analogin i flera variabler är differentierbarheten i punkten a , där

$$f(a+h) = f(a) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n,$$

beskriver tangentplanet i punkten a . Felet beskrivs av $|h|\rho(h)$.

Sats 3.7. Om $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ är differentierbar i a så är f partiellt deriverbar i a och $A_j = f'_{x_j}(a)$ i (3.4).

BEVIS: Eftersom f är differentierbar så vet vi att det finns tal $A_1, A_2, \dots, A_n$ och en funktion ρ sådana att

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + |h|\rho(h), \quad (3.8)$$

där ρ uppfyller (3.5).

Det räcker att visa att $f'_{x_1}(a)$ existerar. Eftersom denna likhet gäller för alla h så kan vi välja $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. Vi får då

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + |h_1|\rho(h). \quad (3.9)$$

Låt oss studera den partiella derivatan med avseende på x_1 ,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = A_1 + \frac{|h_1|\rho(h)}{h_1} \rightarrow A_1, \quad (3.10)$$

då $h_1 \rightarrow 0$, ty

$$\left| \frac{|h_1|\rho(h)}{h_1} \right| = |\rho(h)| \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

då $h \rightarrow 0$ enligt (3.5). ■

Satsen säger alltså att om f är differentierbar så gäller att

$$f(a+h) - f(a) = (\nabla f)(a) \cdot h + |h|\rho(h), \quad (3.12)$$

där $\rho(h) \rightarrow 0$, då $h \rightarrow 0$.

Exempel 3.8. Låt oss ge ett exempel där funktionen är partiellt deriverbar men inte differentierbar i origo. Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (3.13)$$

De partiella derivatorna blir

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \quad (3.14)$$

och

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = 0. \quad (3.15)$$

Alltså är f partiellt deriverbar i origo.

Nu till differentierbarheten. Antag att f är differentierbar. Enligt Sats 3.7 följer då att $A_1 = A_2 = 0$ i (3.4) och för $h \in \mathbb{R}^n$ gäller att

$$f(0 + h) - f(0) = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = |h| \rho(h),$$

med

$$\rho(h) = \frac{h_1^2 h_2}{|h|^3}.$$

Vi inför polära koordinater $h_1 = r \cos \theta$ och $h_2 = r \sin \theta$ och får

$$\rho(h) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^3} = \cos^2 \theta \sin \theta \not\rightarrow 0,$$

då $r \rightarrow 0$ oberoende av θ . Alltså är f inte differentierbar. ▲

Sats 3.9. Om $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ är differentierbar i a så är f kontinuerlig i a .

BEVIS: Antag att f är differentierbar i a . Vi vill visa att f är kontinuerlig i a , d.v.s. att

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) - f(a) = 0. \quad (3.16)$$

Från differentierbarheten får vi

$$\begin{aligned} |f(a + h) - f(a)| &= |A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + |h| \rho(h)| \\ &\leq (A_1 + A_2 + \dots + A_n + \rho(h)) |h| \\ &\leq C |h| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

då $h \rightarrow 0$, för någon konstant C . ■

3.3 Klassen C^k

Definition 3.10. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och $k > 0$ vara ett heltal. Mängden $C^k(D)$ definieras som mängden av alla funktioner $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i D .

Sats 3.11. Om $f \in C^1(D)$ så är f differentierbar i D .

BEVIS: För att inte drunkna i notation genomför vi beviset i två dimensioner. Antag därför att $D \subset \mathbb{R}^2$ och att $f \in C^1(D)$, d.v.s. att de partiella derivatorna f'_x och f'_y är kontinuerliga funktioner.

Vi vill visa att f är differentierbar i $a \in D$. Genom att två gånger använda medelvärdessatsen finns det tal $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ sådana att

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) \\ &\quad + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= f'_x(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2)h_1 + f'_y(a_1, a_2+\theta_2 h_2)h_2 \\ &= f'_x(a)h_1 + f'_y(a)h_2 \\ &\quad + (f'_x(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - f'_x(a))h_1 \\ &\quad + (f'_y(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - f'_y(a))h_2 \\ &= f'_x(a)h_1 + f'_y(a)h_2 + |h|\rho(h) \end{aligned}$$

där

$$\rho(h) = \frac{(f'_x(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - f'_x(a))h_1 + (f'_y(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - f'_y(a))h_2}{|h|}.$$

Det återstår att visa att $\rho(h) \rightarrow 0$, då $h \rightarrow 0$. Genom att nyttja triangelolikheten och kontinuiteten av de partiella derivatorna får vi

$$\begin{aligned} |\rho(h)| &\leq \frac{|f'_x(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - f'_x(a)||h_1| + |f'_y(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - f'_y(a)||h_2|}{|h|} \\ &\leq |f'_x(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - f'_x(a)| + |f'_y(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - f'_y(a)| \\ &\rightarrow |f'_x(a) - f'_x(a)| + |f'_y(a) - f'_y(a)| = 0, \end{aligned}$$

då $h \rightarrow 0$. ■

3.4 Övningar

Övning 3.1. [2022-03-18, uppgift 6b] Visa genom användning av definitionen att $f(x, y) = x^2 y$ är differentierbar i punkten $(1, 1)$. Det är alltså inte möjligt att argumentera att f är av klass C^1 och därmed differentierbar.

Övning 3.2. [2024-06-04, uppgift 1, 41%] Bestäm de tangentplan till ytan $xy + yz + xz = 1$ som är parallella med planet $x + 2y + z = 3$.

4 Kedjeregeln och partiella differentialekvationer

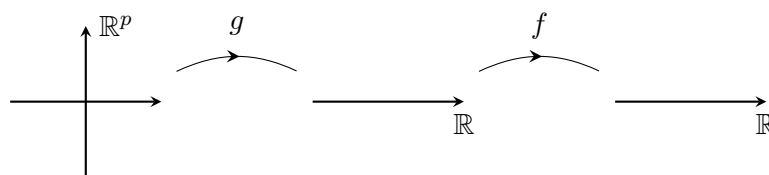
4.1 Kedjeregeln

Vi ska nu generalisera kedjeregeln som i en variabel lyder

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x),$$

givet att allt är definierat.

Vi börjar med fallet då $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vi vill undersöka de partiella derivatorna av funktionen $f \circ g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$.



Vi får direkt från envariabelanalysen att

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f(g(x))) = f'(g(x))g'_{x_j}(x), \quad (4.1)$$

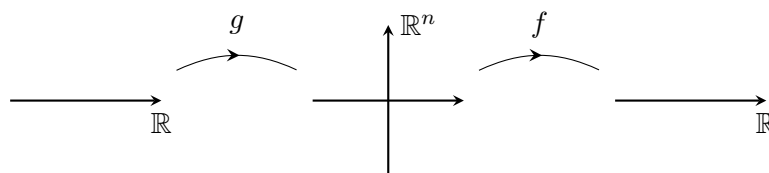
för varje $1 \leq j \leq p$.

Sats 4.1 (Kedjeregeln). *Låt $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$, där g_j är deriverbara funktioner och låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Då gäller att $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar och*

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'_{y_1}(g(x))g'_1(x) + f'_{y_2}(g(x))g'_2(x) + \dots + f'_{y_n}(g(x))g'_n(x) \quad (4.2)$$

där $y = g(x)$.

Vi illustrerar funktionerna g och f med en bild



Notera att med hjälp av gradienten till f kan (4.2) skrivas som

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = (\nabla f)(g(x)) \cdot g'(x), \quad (4.3)$$

BEVIS: För att inte drunkna i notation så visar vi satsen då $n = 2$.

Eftersom f är differentierbar gäller för varje $h \in \mathbb{R}^2$ och $y \in \mathbb{R}^n$ att

$$f(y+h) - f(y) = f'_{y_1}(y)h_1 + f'_{y_2}(y)h_2 + \dots + f'_{y_n}(y)h_n + |h|\rho(h), \quad (4.4)$$

där $\rho(h) \rightarrow 0$, då $h \rightarrow 0$.

Låt $x \in \mathbb{R}$ vara sådan att $y = g(x)$. Låt $k \neq 0$ vara ett reellt tal och välj $h = g(x+k) - g(x)$.

Efter division med k får vi

$$\frac{f(g(x+k)) - f(g(x))}{k} = \sum_{j=1}^n f'_{y_j}(g(x)) \frac{(g_j(x+k) - g_j(x))}{k} + \frac{|h|\rho(h)}{k}.$$

Då $k \rightarrow 0$ får vi

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \sum_{j=1}^n f'_{y_j}(g(x))g'_j(x) + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{|h|\rho(h)}{k}.$$

Det återstår att visa att

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{|h|\rho(h)}{k} = 0.$$

Detta följer av att

$$\frac{|h|\rho(h)}{k} = \frac{|g(x+k) - g(x)|}{k} \rho(h) \rightarrow |g'(x)| \cdot 0 = 0,$$

då $k \rightarrow 0$. Notera att eftersom elementen g_j i g alla är deriverbara så är de kontinuerliga och därmed gäller att $h = g(x+k) - g(x) \rightarrow 0$, då $k \rightarrow 0$. ■

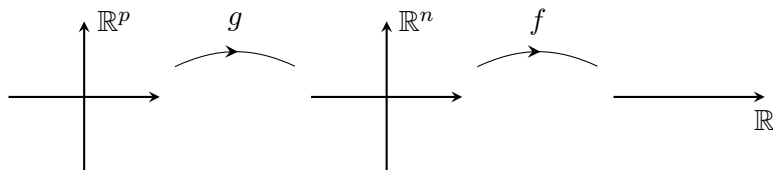
Följdsats 4.2. Låt $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$, där g_j är differentierbara funktioner och låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Då gäller att $f \circ g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ är partiellt deriverbar och

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f(g(x))) = f'_{y_1}(g(x))(g_1)_{x_j}'(x) + \dots + f'_{y_n}(g(x))(g_n)_{x_j}'(x), \quad (4.5)$$

där $y = g(x)$. Vi kan med alternativ notation skriva

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f(g(x))) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)) \frac{\partial y_1}{\partial x_j}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(g(x)) \frac{\partial y_n}{\partial x_j}(x). \quad (4.6)$$

Vi illustrerar med en bild



Beviset följer direkt från att kombinera sats 4.1 och (4.1).

Sats 4.3. Låt $f \in C^1(D)$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ är en öppen och bågvis sammanhängande mängd. Om $(\nabla f)(x) = 0$ för varje $x \in D$ så gäller att f är konstant på D .

BEVIS: Låt $a, b \in D$ vara godtyckliga punkter. Vi är klara om vi lyckas visa att $f(a) = f(b)$, eftersom då har f alltid värdet $f(a)$ på hela D .

Vi kan finna en deriverbar kurva $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ sådan att $\gamma(0) = a$ och $\gamma(1) = b$. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \quad (4.7)$$

eftersom $\nabla f = 0$. Men eftersom $f \circ \gamma$ är en envariabelfunktion vars derivata alltid är noll så är

$$f(\gamma(t)) = C, \quad (4.8)$$

för någon konstant C . Alltså gäller att $f(a) = f(b) = C$. ■

Exempel 4.4. Låt $f(x, y) = \sin(x^2 y)$, där $x = st^2$ och $y = s^2 + t^{-1}$. Beräkna de partiella derivatorna $\frac{\partial f}{\partial s}$ och $\frac{\partial f}{\partial t}$.

LÖSNING: Från sats 4.2 får vi att

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (4.9)$$

Här är

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy \cos(x^2 y) = 2st^2(s^2 + t^{-1}) \cos(s^2 t^4(s^2 + t^{-1})) \\ &= (2s^3 t^2 + 2st) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cos(x^2 y) = s^2 t^4 \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3) \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (2s^3 t^2 + 2st) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3) t^2 + s^2 t^4 \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3) 2s \\ &= 2(2s^3 t^4 + st^3) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3). \end{aligned}$$

På liknande vis får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (2s^3 t^2 + 2st) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3) 2st + s^2 t^4 \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3) (-t^{-2}) \\ &= (4s^4 t^3 + 3s^2 t^2) \cos(s^4 t^4 + s^2 t^3). \end{aligned}$$

▲

Exempel 4.5. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Ange uttrycket

$$f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2$$

i polära koordinater.

LÖSNING: Låt $g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$, där

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Enligt kedjeregeln gäller

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &= -r \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + r \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)). \end{aligned}$$

Från detta ekvationssystem kan vi lösa ut

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \cos \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \sin \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned} f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 &= \left(\cos \theta g'_r - r^{-1} \sin \theta g'_\theta \right)^2 + \left(\sin \theta g'_r + r^{-1} \cos \theta g'_\theta \right)^2 \\ &= g'_r(r, \theta)^2 + \frac{1}{r^2} g'_\theta(r, \theta)^2. \end{aligned}$$

▲

4.2 Partiella differentialekvationer

Exempel 4.6. Bestäm genom variabelbytet

$$\begin{cases} s = x^2 + y^2 \\ t = x^2 - y^2 \end{cases} \quad (4.10)$$

den lösning till den partiella differentialekvationen

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (4.11)$$

i området $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ som uppfyller att $f(0, y) = e^y$.

LÖSNING: Vi börjar med att skriva om differentialekvationen uttrycket i s och t . Låt $g(s(x, y), t(x, y)) = f(x, y)$. Vi får från kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} 2x + \frac{\partial g}{\partial t} 2x$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} 2y - \frac{\partial g}{\partial t} 2y.$$

Differential ekvationen blir därmed

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy \frac{\partial g}{\partial t} = 0,$$

vilket är ekvivalent med

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Det betyder att $g(s, t) = \varphi(s)$, där φ är en deriverbar funktion. Alltså gäller att

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2).$$

För att f ska uppfylla randvärdena så får vi

$$f(0, y) = \varphi(y^2) = e^y = e^{\sqrt{y^2}}.$$

vilket ger att $\varphi(s) = e^{\sqrt{s}}$.

Alltså ges lösningen av

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

▲

Exempel 4.7. Bestäm den lösning $f(x, y)$ till differentialekvationen

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

som uppfyller villkoret $f(x, 0) = \sin x$ genom att välja lämpligt k i variabelbytet

$$\begin{cases} u = x - ky \\ v = x + ky. \end{cases}$$

LÖSNING: Låt $g(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$. Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -k \frac{\partial g}{\partial u} + k \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Differentialekvationen blir nu

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (2 - k) \frac{\partial g}{\partial u} + (2 + k) \frac{\partial g}{\partial v} = 0.$$

och det vettigt att välja k till -2 eller 2 . Låt oss välja $k = 2$, då gäller att

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0,$$

och därmed är $g(u, v) = \varphi(u)$, för någon deriverbar funktion φ . Uttryckt i $f(x, y) = \varphi(x - 2y)$. Begynnelsevillkoret $f(x, 0) = \varphi(x) = \sin x$, alltså gäller att

$$f(x, y) = \sin(x - 2y).$$

▲

4.3 Högre ordningens derivator

Låt f vara en partiellt deriverbar funktion i ett öppet område $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt även f'_{x_i} vara en partiellt deriverbar funktion. Vi inför notationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \quad (4.12)$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \quad (4.13)$$

för att beskriva andraderivator. Alternativ notation är

$$f''_{x_i x_j}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad (4.14)$$

och

$$f''_{x_i x_i}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \quad (4.15)$$

Uttrycken kan på samma vis generaliseras till högre partiella derivator.

Exempel 4.8. Låt $f(x, y) = x^2 \sin y$, då gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2x \sin y) = 2 \sin y, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2x \sin y) = 2x \cos y. \quad (4.17)$$

▲

Definition 4.9. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$. Mängden $C^k(D)$ definieras som mängden av alla funktioner $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i D .

Sats 4.10. Låt $f \in C^2(D)$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (4.18)$$

BEVIS: Vi kan anta att $n = 2$. Vi vill alltså visa att $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$, för en godtycklig punkt $(a, b) \in D$.

Låt $w(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$ för (h, k) i en liten omgivning av origo. Vi visar satsen genom att visa att

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{w(h, k)}{hk} = f''_{xy}(a, b) \quad (4.19)$$

och

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{w(h, k)}{hk} = f''_{yx}(a, b). \quad (4.20)$$

Låt oss först visa att (4.19) gäller. Låt $u(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b)$. Då kan vi skriva $w(h, k) = u(h, k) - u(0, k)$. Med hjälp av att upprepat använda medelvärdessatsen från envariabelanalysen så finns det $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ sådana att

$$\begin{aligned} w(h, k) &= u(h, k) - u(0, k) \\ &= hu'_h(\theta_1 h, k) \\ &= h(f'_x(a + \theta_1 h, b + k) - f'_x(a + \theta_1 h, b)) \\ &= hkf''_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k). \end{aligned}$$

Notera enligt kedjeregeln att

$$\begin{aligned} u'_h(h, k) &= \frac{\partial}{\partial h} (f(a + h, b + k) - f(a + h, b)) \\ &= \frac{\partial}{\partial h} f(a + h, b + k) - \frac{\partial}{\partial h} f(a + h, b) \\ &= f'_x(a + h, b + k) \frac{\partial}{\partial h} (a + h) + f'_y(a + h, b + k) \frac{\partial}{\partial h} (b + k) \\ &\quad - f'_x(a + h, b) \frac{\partial}{\partial h} (a + h) - f'_y(a + h, b) \frac{\partial}{\partial h} (b) \\ &= f'_x(a + h, b + k) - f'_x(a + h, b). \end{aligned}$$

Genom att dividera med hk , låta $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ och påminna oss om att f''_{xy} är kontinuerlig så får vi (4.19).

Likheten (4.20) visas på samma vis med u utbytt till funktionen $v(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b + k)$. Då blir $w(h, k) = v(h, k) - v(h, 0)$. Medelvärdessatsen kommer nu att först tillämpas på det andra argumentet först och därefter det första vilket ger önskat resultat. ■

Exempel 4.11. Bestäm alla lösningar $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (4.21)$$

där utbredningshastigheten $c > 0$, genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct. \end{cases}$$

LÖSNING: Vi får att

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= c \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= c^2 \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

vilket är detsamma som

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = 0.$$

Primitiv funktion med avseende på u blir

$$\frac{\partial f}{\partial v} = g_1(v)$$

och

$$f = g_2(u) + g_3(v),$$

där $g_j \in C^2$ med $g'_3(v) = g_1(v)$. I de ursprungliga variablerna får vi

$$f(x, t) = g_2(x + ct) + g_3(x - ct).$$

När tiden t förändras translateras lösningen med utbredningshastigheten c . ▲

Exempel 4.12. Visa att **Laplace operatorn**

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (4.22)$$

i polära koordinater blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (4.23)$$

LÖSNING: Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.24)$$

och

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \cos \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Nu till vinkeln θ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

och

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
&= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} \\
&= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\
&\quad - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\
&= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Tillsammans får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\
&= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left(-r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right. \\
&\quad \quad \left. + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

och vi är klara. ▲

4.4 Övningar

Övning 4.1. [2022-03-18, uppgift 3, 70%] Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad x > 0, y > 0,$$

som uppfyller att $f(u, u) = 2u^2$, genom att införa de nya variablerna $s = x^2 + y^2$ och $t = x^2 - y^2$.

Övning 4.2. [2022-06-08, uppgift 4, 45%] Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1,$$

genom att införa de nya variablerna $u = x + \alpha y$ och $v = x + \beta y$. Ange svaret i de ursprungliga variablerna x och y .

Övning 4.3. [2022-03-18, uppgift 5, 85%] Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(x + y)f'_x(x, y) + (x - y)f'_y(x, y) = 0,$$

där $x > y$, som uppfyller att $f(x, 0) = e^{x^2}$, genom att nyttja variabelbytet

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 - 2xy \\ v = y \end{cases}.$$

Övning 4.4. [2023-06-07, uppgift 4, 54%] Givet en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u = u(x, y)$. Transformera uttrycket

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} s = -\ln x + \ln y \\ t = \ln x + \ln y. \end{cases}$$

Övning 4.5. [2024-03-14, uppgift 5, 71%]

a) Antag att $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är av klass C^2 , där

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}.$$

Låt oss införa de nya variablerna

$$\begin{cases} s = \sqrt{y} \\ t = \sqrt{x - y}. \end{cases}$$

Transformera uttrycket

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i de nya variablerna.

b) Uttryck differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

i de nya variablerna.

c) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen och uttryck svaret i de ursprungliga variablerna x och y .

Övning 4.6. [2024-06-04, uppgift 8, 18%] Bestäm alla funktioner av formen $u(x, y) = f(y/x)$ som uppfyller

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

för $x > 0$.

5 Riktningsderivata och Gradient

5.1 Riktningsderivata

Definition 5.1. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, a vara en inre punkt i D och $v \in \mathbb{R}^n$ vara en enhetsvektor. Om gränsvärdet

$$f'_v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

existerar så sägs f vara **deriverbar med avseende på riktningen** v i punkten a . Man säger även att f har **riktningsderivatan** $f'_v(a)$ i punkten a i riktningen v .

Exempel 5.2. Låt $f(x, y) = x + e^y$. Bestäm med hjälp av definitionen riktningsderivatan av f i riktningen

$$v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

i punkten $a = (1, 0)$.

Vi får

$$\begin{aligned} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} &= \frac{1}{h} \left(f(1 + h\sqrt{3}/2, h/2) - f(1, 0) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(1 + h\sqrt{3}/2 + e^{h/2} - 2 \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{e^{h/2} - 1}{h} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{h/2} - 1}{h/2} \\ &\rightarrow \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \end{aligned}$$

då $h \rightarrow 0$. ▲

Det finns lyckligtvis ett enklare sätt att beräkna riktningsderivator.

Sats 5.3. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ är en öppen mängd. Om f är differentierbar så gäller att

$$f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v. \quad (5.1)$$

BEVIS: Låt $g(h) = a + hv$, vi får

$$\begin{aligned} f'_v(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h)) - f(g(0))}{h} \\ &= (\nabla f)(g(0)) \cdot g'(0) \\ &= (\nabla f)(a) \cdot v \end{aligned}$$

eftersom $g(0) = a$ och $g'(0) = v$. ■

Sats 5.4. Låt f vara en differentierbar funktion definierad i en omgivning av $a \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att gradienten $(\nabla f)(a)$ pekar i den riktning i vilken f växer snabbast. Den maximala tillväxten ges av $|(\nabla f)(a)|$.

BEVIS: Enligt Cauchy-Schwarz olikhet har vi

$$f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v \leq |(\nabla f)(a)| \cdot |v| = |(\nabla f)(a)|, \quad (5.2)$$

eftersom $|v| = 1$.

Likhet i Cauchy-Schwarz olikhet sker då och endast då $(\nabla f)(a)$ och v är parallella. Likhet i (5.2) sker emellertid endast då och endast då vektorerna pekar i samma riktning. ■

Exempel 5.5. Temperaturen i en punkt (x, y) i ett område ges av $T(x, y) = 2y + xe^{-y}$. I vilken riktning från punkten $(1, 0)$ ökar temperaturen mest. Hur mycket ökar den?

LÖSNING: Låt oss bestämma ∇T ,

$$(\nabla T)(x, y) = (T'_x(x, y), T'_y(x, y)) = (e^{-y}, 2 - xe^{-y}).$$

I punkten $(1, 0)$ får vi $(\nabla T)(1, 0) = (1, 1)$. Alltså ökar temperaturen mest i punkten $(1, 0)$ i riktningen $(1, 1)$ och tillväxten är $|(1, 1)| = \sqrt{2}$. ▲

Exempel 5.6. Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x, y) = xy \sin x$ i den punkt där $x = \pi/2$ och $y = 1$. I vilken riktning växer f snabbast i den givna punkten? Ange även tillväxten i den riktningen.

LÖSNING:

Gradienten till f ges av

$$(\nabla f)(x, y) = (y \sin x + xy \cos x, x \sin x).$$

Tangentplanet ges av

$$T(\pi/2 + h, 1 + k) = f(\pi/2, 1) + (\nabla f)(\pi/2, 1) \cdot (h, k)$$

vilket för $(x, y) = (\pi/2 + h, 1 + k)$ blir

$$T(x, y) = \pi/2 + (1, \pi/2) \cdot (x - \pi/2, y - 1)$$

eller

$$2z = 2T(x, y) = 2x + \pi y - \pi.$$

Funktionen f växer snabbast i gradientens riktning, alltså gäller att f växer snabbast i riktningen $(\nabla f)(\pi/2, 1) = (1, \pi/2)$. Tillväxten i den riktningen är

$$|(1, \pi/2)| = \sqrt{1 + \pi^2/4}.$$

▲

5.2 Nivåytor och nivåkurvor

Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ och låt $C \in \mathbb{R}$. Mängden

$$M_C = \{x \in D : f(x) = C\}$$

sågs vara en **nivåyta** till f med avseende på C . I fallet då dimensionen $n = 2$ kallas M_C en **nivåkurva**.

Exempel 5.7. Temperaturen i en punkt (x, y, z) i en kropp ges av

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y.$$

Beskriv nivåytan $T(x, y, z) = C$, där $C \geq 0$.

LÖSNING: Notera först att kvadratkomplettering ger

$$T(x, y, z) = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 2.$$

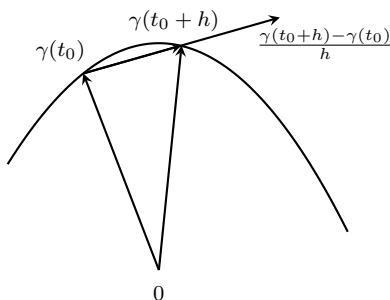
Nivåytan $T(x, y, z) = C$ blir alltså

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = C + 2$$

och beskriver en sfär med centrum i $(-1, 1, 0)$ och med radie $\sqrt{C + 2}$. ▲

Gradienten för en nivåkurva

Låt $a \in M_C$ och låt $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ beskriva en parametrisering av mängden M_C i en omgivning av a , med $\gamma(t_0) = a$, för något $t_0 \in (\alpha, \beta)$.



Alltså är $f(\gamma(t)) = C$, för varje $t \in (\alpha, \beta)$ och därmed ger kedjeregeln att

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

Eftersom $\gamma'(a)$ pekar i riktningen av kurvan är alltså $(\nabla f)(\gamma(a))$ ortogonal mot kurvans riktning.

Exempel 5.8. Låt oss studera ett trivialt exempel. Låt $f(x, y) = y - 2x - 1$ och studera nivåkurvan $f(x, y) = 3$. I detta fall blir nivåkurvan en linje, nämligen $y = 2x + 4$. Denna linje kan parametreras genom att sätta $x = t$ och $y = 2t + 4$. Gradienten av f ges av $(\nabla f)(x, y) = (-2, 1)$. Vi ser att denna vektor är ortogonal mot linjens riktning. ▲

Exempel 5.9. Bestäm tangentplanet i punkten $(1, 1, 5)$ till paraboloiden

$$z = x^2 + 4y^2.$$

LÖSNING: Låt $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z$ och studera nivåytan $F(x, y, z) = 0$. Gradienten

$$(\nabla F)(x, y, z) = (2x, 8y, -1)$$

är en normalvektor till nivåytan och $n = (\nabla F)(1, 1, 5) = (2, 8, -1)$ är en normal till det sökta tangentplanet. Alltså ges tangentplanet av

$$n \cdot (x - 1, y - 1, z - 5)$$

vilket blir

$$2x + 8y - z = 5.$$

▲

5.3 Övningar

Övning 5.1. [2022-03-18, uppgift 1, 83%] Låt $f(x, y, z) = xy + e^{yz} + z$.

- Bestäm derivatan av f i punkten $(3, 1, 0)$ längs enhetsvektorn $v = (a, b, c)$.
- Hur ska v väljas för att derivatan skall bli så stor som möjligt?

Övning 5.2. [2022-03-18, uppgift 8, 42%] Bestäm det minsta avståndet från ellipsoiden $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ till planet $x + y + z = 6$.

Övning 5.3. [2023-03-17, uppgift 1, 84%] Låt $f(x, y, z) = x^2 + yz$.

- Bestäm riktningsderivatan till f i punkten $(1, 1, 1)$ i riktningen mot punkten $(3, 3, 2)$.
- I vilken riktning från punkten $(1, 1, 1)$ växer f snabbast och hur stor är tillväxten i denna riktning?

Övning 5.4. [2023-06-07, uppgift 2, 57%] Skärningen mellan ellipsoiden

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

och planet

$$x - y + 2z = 2$$

är en ellips i rummet. Bestäm en tangentvektor för denna ellips i punkten $(1, 1, 1)$.

6 Taylors formel och lokala extrempunkter

6.1 Taylors formel

Sats 6.1 (Taylors formel av andra ordningen i två variabler). Låt $f \in C^3(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och låt $a \in D$. Då gäller att

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)h_2^2 \right) \\ &\quad + B(h)|h|^3, \end{aligned}$$

där B är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

BEVIS: Låt $f \in C^3(D)$ och låt $a \in D$. För $t \in \mathbb{R}$, bilda $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som

$$g(t) = f(a+th). \quad (6.1)$$

Från Taylors formel av en variabel får vi

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)t^2}{2!} + \frac{g'''(\theta)t^3}{3!}, \quad (6.2)$$

för något $\theta \in [0, 1]$.

Låt oss överföra denna likhet till funktionen f . Vi har från kedjeregeln att

$$g'(t) = \frac{d}{dt}(f(a+th)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+th)h_2$$

och

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+th)h_2 \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a+th)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a+th)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a+th)h_2^2 \end{aligned}$$

Alltså blir (6.2) för $t = 1$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)h_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{g'''(\theta)}{3!}. \end{aligned}$$

Det återstår att visa att

$$g'''(\theta) = B(h)|h|^3.$$

Vi deriverar g ytterligare en gång

$$g'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(a+th)h_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}(a+th)h_1^2h_2 \quad (6.3)$$

$$+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2^2}(a+th)h_1h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(a+th)h_2^3. \quad (6.4)$$

Eftersom $f \in C^3(D)$ så är alla derivatorna av ordning tre begränsade i en omgivning av a , dessutom gäller att $|h_i| \leq |h|$. Vi kan konstatera att för varje omgivning Ω till origo så finns en konstant C sådan att

$$|B(h)| = \frac{|g'''(\theta)|}{|h|^3} \leq C.$$

Vi är klara. ■

6.2 Lokala extrempunkter

Definition 6.2. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att f har ett **lokalt maximum** i $a \in D$ om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(x) \leq f(a)$ för varje $x \in D$ som uppfyller $|x - a| < \delta$. Vi kallar då a en **lokal maxpunkt**.

Analogt definierar vi begreppen **lokalt minimum** och **lokal minpunkt**. Lokala max- och minpunkter kallas för **lokala extrempunkter**.

Sats 6.3. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ha ett lokalt extremvärde i en inre punkt $a \in D$. Om f är partiellt deriverbar i a så gäller att $(\nabla f)(a) = 0$.

BEVIS: Låt oss visa att $f'_1(a) = 0$. Resterande del följer på samma vis. Bilda $g(t) = f(a_1 + t, a_2, \dots, a_n)$. Eftersom $f(a)$ är ett extremvärde så har g ett extremvärde för $t = 0$. Från envariabelanalysen har vi att $g'(0) = 0$. Notera att $g'(t) = f'_1(a_1 + t, a_2, \dots, a_n)$ vilket ger att $f'_1(a) = 0$ och vi är klara. ■

Definition 6.4. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en partiellt deriverbar funktion. Vi säger att $a \in D$ är en **stationär punkt** om $(\nabla f)(a) = 0$.

Låt $f \in C^3(D)$ och låt $a \in D$ vara en stationär punkt. Då gäller att

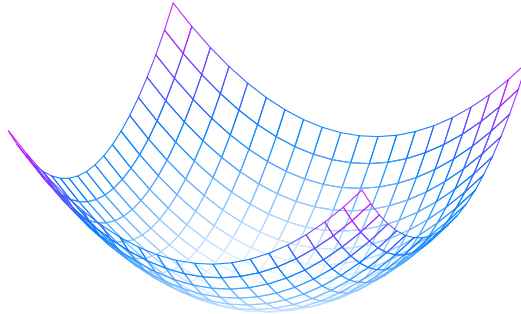
$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q(h) + |h|^3B(h),$$

där B är begränsad funktion i en omgivning till origo och Q är den kvadratiske formen

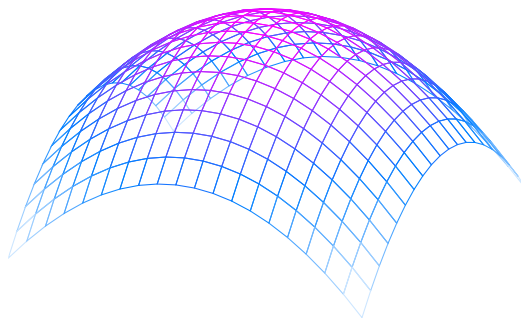
$$Q(h) = f''_{11}(a)h_1^2 + 2f''_{12}(a)h_1h_2 + f''_{22}(a)h_2^2. \quad (6.5)$$

För att avgöra karaktären av f vid den stationära punkten $a \in D$ så studerar hur Q beter sig i en omgivning Ω av origo. Vi har fem fall

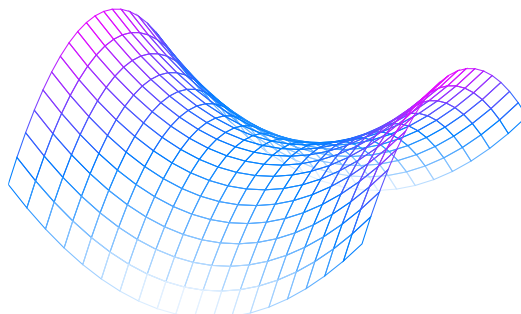
- a) Q är **positivt definit**, d.v.s. $Q(h) > 0$, för varje $h \in \Omega \setminus \{0\}$. I detta fall är $f(a)$ ett lokalt minimum



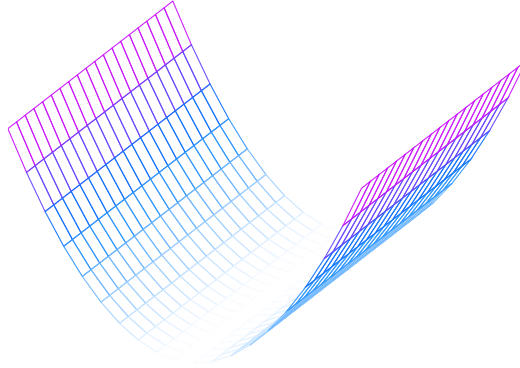
- b) Q är **negativt definit**, d.v.s. $Q(h) < 0$, för varje $h \in \Omega \setminus \{0\}$. I detta fall är $f(a)$ ett lokalt maximum,



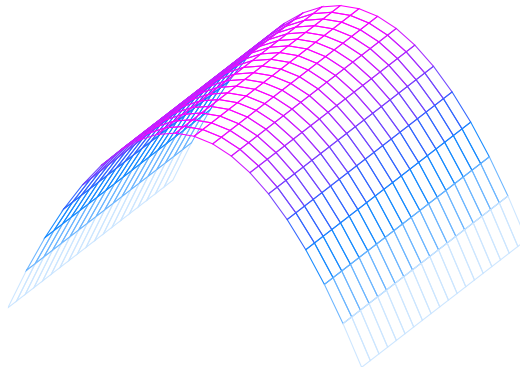
- c) Q är **indefinit**, d.v.s. det finns $h, k \in \Omega \setminus \{0\}$ sådana att $Q(h) < 0$ och $Q(k) > 0$. I detta fall sägs a vara en **sadelpunkt**,



- d) Q är **positivt semidefinit**, d.v.s. $Q(h) \geq 0$, för varje $h \in \Omega \setminus \{0\}$ och det finns ett $h \in \Omega \setminus \{0\}$ sådant att $f(h) = 0$. I detta fall behövs mer detaljerade studier av f ,



- e) Q är **negativt semidefinit**, d.v.s. $Q(h) \leq 0$, för varje $h \in \Omega \setminus \{0\}$ och det finns ett $h \in \Omega \setminus \{0\}$ sådant att $f(h) = 0$. I detta fall behövs mer detaljerade studier av f .



Exempel 6.5. Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x, y, z) = (x + xy + yz)e^x.$$

Ange alla stationära punkter till f . Har f någon lokal extrempunkt?

LÖSNING: En punkt (x, y, z) är stationär om

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = (1 + y + x + xy + yz)e^x = 0, \\ f'_y(x, y, z) = (x + z)e^x = 0, \\ f'_z(x, y, z) = ye^x = 0, \end{cases}$$

vilket är detsamma som $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$. Vi har alltså endast en stationär punkt.

Låt oss undersöka om $(-1, 0, 1)$ är en extrempunkt till f . Vi beräknar följande partiella derivator

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y, z) = (2 + 2y + x + xy + yz)e^x, \\ f''_{yy}(x, y, z) = 0, \\ f''_{zz}(x, y, z) = 0, \\ f''_{xy}(x, y, z) = (1 + x + z)e^x, \\ f''_{xz}(x, y, z) = ye^x, \\ f''_{yz}(x, y, z) = e^x \end{cases}$$

och för den stationära punkten $(-1, 0, 1)$ får vi den kvadratiske formen

$$Q(h_1, h_2, h_3) = e^{-1} (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2 h_3).$$

Notera att Q är indefinit eftersom $Q(0, e, 1) = 1$ och $Q(0, -e, 1) = -1$. Alltså har f en sadelpunkt i $(-1, 0, 1)$ och därmed saknar f extrempunkter. $\blacktriangle$

Exempel 6.6. Visa att om $f \in C^3(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, har en stationär punkt i $a \in D$ och $A = f''_{xx}(a)$, $B = f''_{xy}(a)$ och $C = f''_{yy}(a)$ så gäller att om

- a) $AC - B^2 < 0$, är a en sadelpunkt,
- b) $AC - B^2 > 0$ och $A > 0$, är a en lokal minpunkt,
- c) $AC - B^2 > 0$ och $A < 0$, är a en lokal maxpunkt.

LÖSNING: Antag först att $A \neq 0$. Då gäller att den kvadratiske formen via kvadratkomplettering uppfyller

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \\ &= A \left(h^2 + \frac{2Bhk}{A} \right) + Ck^2 \\ &= A \left(h + \frac{Bk}{A} \right)^2 - A \left(\frac{Bk}{A} \right)^2 + Ck^2 \\ &= A \left(h + \frac{Bk}{A} \right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A} \right) k^2 \end{aligned}$$

Antag nu att $A > 0$. Då gäller att den kvadratiske formen Q är positivt definit då $AC - B^2 > 0$ vilket ger ett lokalt minimum och indefinit i fallet då $AC - B^2 < 0$ vilket ger en sadelpunkt.

Nu till fallet $A < 0$. Notera att i detta fall är $C - B^2/A < 0$ ekvivalent med $AC - B^2 > 0$. Om $AC - B^2 > 0$ är alltså Q negativt definit och om $AC - B^2 < 0$ har Q en sadelpunkt. $\blacktriangle$

6.3 Övningar

Övning 6.1. [2022-03-18, uppgift 2, 64%]

Finn alla lokala max- och minpunkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 \ln(1 + xy),$$

då $x > 0$ och $y > 0$.

7 Kurvor och ytor på parameterform

7.1 Kurvor på parameterform

Vi ska i detta kapitel studera vektorvärda funktioner $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ som uppfyller att dess komponenter $x_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbara och $x'(t) \neq 0$, för varje $t \in [a, b]$.

Mängden

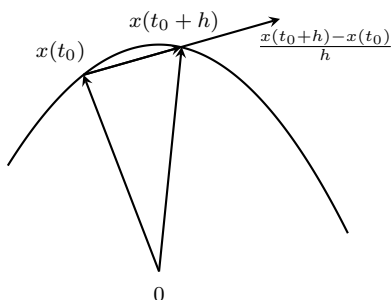
$$\gamma = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : a \leq t \leq b\} \quad (7.1)$$

kallas för en **kurva**, funktionen $t \mapsto x(t)$ för en **parametrisering** av kurvan och t kallas för **parameter**. Observera att en parametrisering av γ är inte unik. Man kan tänka på detta som en beskrivning av något som färdas genom $\mathbb{R}^n$ som vid tiden $t \in [a, b]$ befinner sig på positionen $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Låt $t_0 \in (a, b)$, eftersom x_j är deriverbara funktioner existerar gränsvärdet

$$x'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \quad (7.2)$$

som kallas **derivatan** av x i punkten t_0 .



Notera att $x'(t_0)$ är parallell med kurvans tangent i t_0 . Tangentens ekvation i t_0 ges av

$$T = x(t_0) + x'(t_0)t. \quad (7.3)$$

Vi säger att kurvan är **orienterad** i den riktning som $x'(t)$ pekar. Givet att $x(t)$ beskriver positionen som en funktion av tiden så beskriver $x'(t)$ hastigheten, $|x'(t)|$ farten och $x''(t)$ accelerationen vid tiden t .

Exempel 7.1. En partikel rör sig längs banan

$$x(t) = (\cos t, 2 \sin t, t), \quad t > 0.$$

Bestäm partikelns hastighet, fart och acceleration i punkten $(-1, 0, \pi)$.

LÖSNING: Hastigheten i punkten $x(t)$ ges av

$$x'(t) = (-\sin t, 2 \cos t, 1)$$

och speciellt i punkten $(-1, 0, \pi)$, vilket motsvarar $t = \pi$ är hastigheten $x(\pi) = (0, -2, 1)$. Farten är $|x(\pi)| = \sqrt{5}$. Accelerationen i punkten $x(t)$ är

$$x''(t) = (-\cos t, -2\sin t, 0)$$

och därmed är $x''(\pi) = (1, 0, 0)$. ▲

7.2 Längd av kurvor

Låt γ vara en kurva i $\mathbb{R}^n$ med de två parameterframställningarna $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, där $x(a) = y(\alpha)$ och $x(b) = y(\beta)$. För varje $t \in [a, b]$ finns det alltså ett $s \in [\alpha, \beta]$ sådan att $x(t) = y(s)$. Låt oss kalla denna avbildning $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$. Vi har $s = \varphi(t)$, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ och φ är strängt växande. Låt oss även anta att φ och φ^{-1} är deriverbara.

Eftersom $x(t) = y(\varphi(t))$ så gäller att

$$\begin{aligned} \int_a^b |x'(t)| dt &= \int_a^b \left| \frac{d}{dt} (y(\varphi(t))) \right| dt = \int_a^b |y'(\varphi(t))\varphi'(t)| dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int_\alpha^\beta |y'(s)| ds. \end{aligned}$$

Detta visar att talet

$$L_\gamma = \int_a^b |x'(t)| dt \tag{7.4}$$

är oberoende av vilken parametrisering vi använder av γ . I fallet att $x(t)$ beskriver positionen vid tiden t så får vi L_γ genom att multiplicera farten med tiden.

Olika parameterframställningar till kurvan γ beskriver hur snabbt vi genomlöper grafen. Det finns en naturlig fart på parametern som gör att farten alltid är 1. Låt oss visa detta.

Givet en parametrisering $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ låt

$$s = \varphi(t) = \int_a^t |x'(u)| du, \tag{7.5}$$

vara en ny parameter. Vi får att $\alpha = \varphi(a) = 0$, $\beta = \varphi(b) = L_\gamma$ och $y(s) = y(\varphi(t)) = x(t)$. Från analysens huvudsats får vi att $\varphi'(t) = |x'(t)|$ vilket via

$$|x'(t)| = |y'(\varphi(t))\varphi'(t)| = |y'(s)||x'(t)|$$

ger att $|y'(s)| = 1$. I parametriseringen y blir L_γ synnerligen enkel

$$L_\gamma = \int_0^{L_\gamma} ds.$$

Vi definierar detta tal L_γ som längden av kurvan γ och ds som kommer från den valda parametriseringen kallas för **bågelementet**. Vi använder notationen

$$\int_\gamma ds = \int_0^{L_\gamma} ds = L_\gamma.$$

7.3 Ytor på parameterform

Låt $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, där $D \subset \mathbb{R}^2$, d.v.s.

$$x(s, t) = (x_1(s, t), x_2(s, t), x_3(s, t)),$$

där x_j vara av klass $C^1(D)$ och

$$N(s, t) := (x'_s \times x'_t)(s, t) \neq 0,$$

för varje $(s, t) \in D$. Mängden

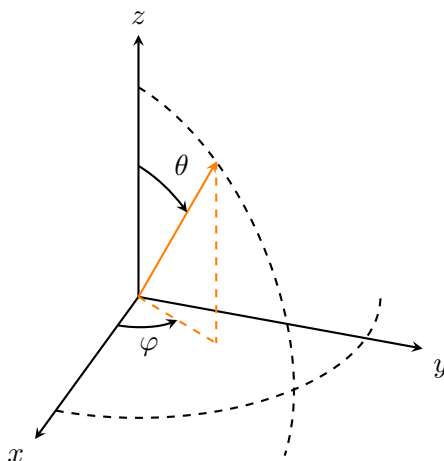
$$Y = \{x(s, t) \in \mathbb{R}^3 : (s, t) \in D\}$$

beskriver då en yta i $\mathbb{R}^3$. Vektorn $N(s, t)$ utgör en normalvektor till ytans tangentplan i punkten $x(s, t)$. Vi säger då att N är en normalvektor till ytan Y .

Exempel 7.2. En parametrisering av enhetssfären är $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$x(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

där $D = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.



Här är

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta)$$

och

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

vilket ger normalvektor

$$\begin{aligned} N(\theta, \varphi) &= \frac{\partial x}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \sin^2 \theta, \sin \varphi \sin^2 \theta, \sin \theta \cos \theta) \\ &= \sin \theta \cdot x(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Notera att $N(\theta, \varphi)$ är riktad i samma riktning som $x(\theta, \varphi)$. ▲

Exempel 7.3. Låt $z = f(x, y)$ vara en funktionsgraf, där $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ och $D \subset \mathbb{R}^2$. Grafen

$$G = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\},$$

är en yta med D som parametermängd. Låt $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$, då får vi normalvektorn

$$\begin{aligned} N &= \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = (1, 0, -f'_x(x, y)) \times (0, 1, f'_y(x, y)) \\ &= (-f'_x(x, y), -f'_y(x, y), 1). \end{aligned}$$

Alltså pekar normalvektorn i detta fall uppåt. ▲

8 Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$

8.1 Funktionalmatris

Definition 8.1. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att f är **differentierbar** om alla komponenterna $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbara, för $1 \leq j \leq p$.

Om $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ är differentierbar så gäller för $a \in D$ och $h \in \mathbb{R}^n$ att

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \begin{pmatrix} f_1(a+h) - f_1(a) \\ f_2(a+h) - f_2(a) \\ \vdots \\ f_p(a+h) - f_p(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + |h| \begin{pmatrix} \rho_1(h) \\ \rho_2(h) \\ \vdots \\ \rho_p(h) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

där $\rho(h) = (\rho_1(h), \rho_2(h), \dots, \rho_p(h)) \rightarrow 0$, då $h \rightarrow 0$.

Matrisen med alla derivatorna kallas **funktionalmatrisen** för f och betecknas

$$f'(a) = \frac{\partial(f)}{\partial(x)}(a) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Om $p = 1$ blir funktionalmatrisen för f gradienten för f .

För små h kan vi med hjälp av funktionalmatrisen approximera värdet $f(a+h)$ med

$$f(a) + \frac{\partial(f)}{\partial(x)}(a) \cdot h.$$

Felet i approximationen ges av $|h|\rho(h)$. Denna approximation kallas **linjariseringen** av f i punkten a .

Exempel 8.2. Bestäm funktionalmatrisen till ett polärt koordinatbyte, d.v.s. låt $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

LÖSNING: Vi får

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

▲

Exempel 8.3. Avgör om matrisen

$$\begin{pmatrix} x-y & -x \\ y & y+x \end{pmatrix}$$

är en funktionalmatris $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$. Bestäm i så fall f och g .

LÖSNING: Vi söker alltså f och g sådana att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = y + x.$$

Första likheten ger att $f(x,y) = x^2/2 - xy + c_1(y)$ och andra likheten ger oss $f(x,y) = -xy + c_2(x)$. Alltså måste $c_1(y) = C_1$, $c_2(x) = x^2/2 + C_1$ och

$$f(x,y) = x^2/2 - xy + C_1.$$

På liknande vis får vi att

$$g(x,y) = y^2/2 + xy + C_2.$$

Därmed är matrisen en funktionalmatris. ▲

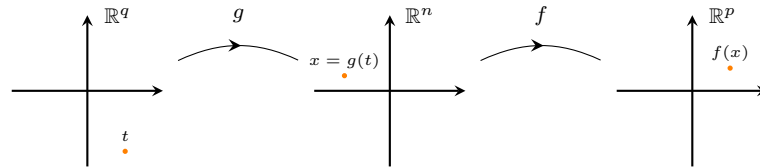
Definition 8.4. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att f är av **klass** $C^k(D)$ om alla komponenterna $f_j \in C^k(D)$, för varje $1 \leq j \leq p$.

Sats 8.5. Låt $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ vara av klass C^1 . Då gäller att sammansättningen $f \circ g$ uppfyller

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial(t)} = \frac{\partial(f)}{\partial(x)} \cdot \frac{\partial(g)}{\partial(t)},$$

där $x = g(t)$.

Vi illustrerar med en bild



Satsen säger att linjariseringen av sammansättningen är produkten av linjariseringarna.

BEVIS: Låt oss studera det element i

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial(t)} \tag{8.1}$$

som finns på rad i och kolonn j . Enligt kedjeregeln får vi för $x = g(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t_j}(x) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) \frac{\partial x_1}{\partial t_j}(t) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \frac{\partial x_n}{\partial t_j}(t) \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_j}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_j}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vilket är rad i från $\partial(f)/\partial(x)$ multiplicerat med kolonn j från $\partial(g)/\partial(t)$. Alltså är likheten visad. ■

8.2 Funktionaldeterminanter

Givet att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ så blir funktionalmatrisen kvadratisk. I detta fall kan vi bestämma determinanten som kallas **Funktionaldeterminanten** för f och betecknas

$$\frac{d(f)}{d(x)} = \frac{d(f_1, f_2, \dots, f_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (8.2)$$

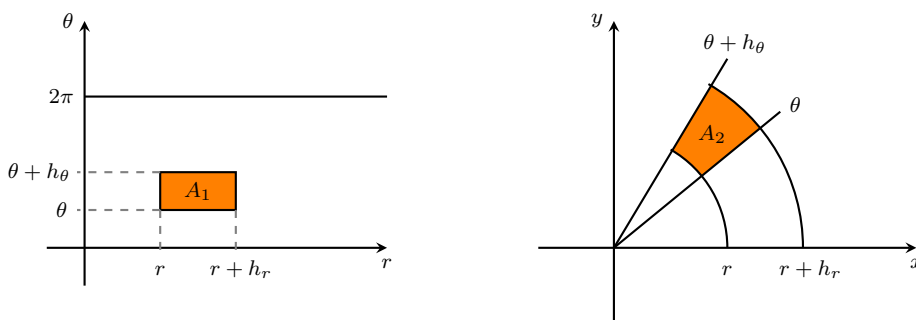
Funktionaldeterminanten ger ett värde på den lokala måttförändringen som sker vid avbildning med f .

Exempel 8.6. Bestäm funktionaldeterminanten av det polära koordinatbytet $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

LÖSNING: Vi får

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Låt oss passa på att studera hur en rektangel med hörn i (r, θ) och $(r + h_r, \theta + h_\theta)$ avbildas av f och beräkna den areaförändring som sker.



Här är $A_1 = h_r h_\theta$ och

$$A_2 = \frac{(\pi(r + h_r)^2 - \pi r^2)h_\theta}{2\pi} = r h_r h_\theta + \frac{h_r^2 h_\theta}{2}.$$

Notera nu att

$$\lim_{(h_r, h_\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{A_2}{A_1} = \lim_{(h_r, h_\theta) \rightarrow (0,0)} \left(r + \frac{h_r}{2} \right) = r$$

vilket sammanfaller med funktionaldeterminanten. ▲

Sats 8.7. Låt $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara av klass C^1 . Då gäller att sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uppfyller

$$\frac{d(f \circ g)}{d(t)} = \frac{d(f)}{d(x)} \cdot \frac{d(g)}{d(t)},$$

där $x = g(t)$.

BEVIS: Likheten följer direkt från sats 8.5 och att determinanten av en produkt är produkten av dess determinanter,

$$\begin{aligned}\frac{d(f \circ g)}{d(t)} &= \det \left(\frac{\partial(f \circ g)}{\partial(t)} \right) = \det \left(\frac{\partial(f)}{\partial(x)} \cdot \frac{\partial(g)}{\partial(t)} \right) \\ &= \det \left(\frac{\partial(f)}{\partial(x)} \right) \cdot \det \left(\frac{\partial(g)}{\partial(t)} \right) = \frac{d(f)}{d(x)} \cdot \frac{d(g)}{d(t)}.\end{aligned}$$

■

Satsen ger oss att linjariseringen av en sammansättning $f \circ g$ är alltså produkten av linjariseringen av f och g .

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en bijektiv avbildning och låt $g = f^{-1}$. Låt $y = f(x)$ och därmed $x = g(y)$. Från likheten $y = f(g(y))$ får vi

$$1 = \frac{d(y)}{d(y)} = \frac{d(f(g(y)))}{d(y)} = \frac{d(f)}{d(x)} \cdot \frac{d(g)}{d(y)} = \frac{d(y)}{d(x)} \cdot \frac{d(x)}{d(y)}$$

som ger formeln

$$\frac{d(y)}{d(x)} = \frac{1}{\frac{d(x)}{d(y)}}.$$

Notera likheterna med inverterbara matriser A , där likheten

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

gäller.

8.3 Inversa funktionssatsen

Exempel 8.8. Låt $f(x) = \sin x$. För vilka x kan vi lokalt bestämma en invers?

För $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ så gäller att $f'(x_0) = \cos x_0 > 0$ vilket ger att det finns en liten omgivning I_0 kring x_0 och en omgivning $I_1 = f(I_0)$ kring $f(x_0)$ sådan att restriktionen $f : I_0 \rightarrow I_1$ är inverterbar.

För $x_1 = \pi/2$ gäller att det inte finns en omgivning till x_1 där f är injektiv, ty $f(x_1 - \delta) = f(x_1 + \delta)$ för alla små δ . ▲

Inversa funktionssatsen ger endast ett tillräckligt villkor för när en funktion är lokalt inverterbar.

Sats 8.9 (Inversa funktionssatsen). Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ tillhör klassen $C^1(D)$, $a \in D$ sådan att funktionaldeterminanten $\det(f'(a)) \neq 0$. Då finns öppna omgivningar U kring a och V kring $f(a)$ sådana att avbildningen $f : U \rightarrow V$ är inverterbar och inversen $f^{-1} : V \rightarrow U$ är C^1 .

9 Implicita funktionssatsen och optimering på kompakta mängder

9.1 Implicita funktionssatsen

Implicita funktioner definieras som lösningar till ekvationer av typen

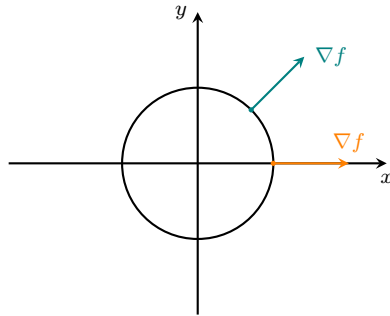
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (9.1)$$

Ett exempel på en sådan är

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

som beskriver enhetscirkeln. Delar av kurvan kan beskrivas som en funktionsgraf av typen $y = y(x)$. Exempelvis beskriver funktionen $y = \sqrt{1 - x^2}$, då $-1 < x < 1$, den övre halvan av enhetscirkeln.

Men lokalt kring punkten $(1, 0)$ har vi problem att beskriva $y = y(x)$ som funktion av x .



För varje omgivning kring $(1, 0)$ finns det punkter (x, y_1) och (x, y_2) sådana att $f(x, y_1) = f(x, y_2) = 0$ och $y_1 \neq y_2$. Notera att i denna punkt är $f'_y(1, 0) = 0$.

Sats 9.1 (Implicita funktionssatsen). Låt $F \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$, $a \in D$ vara en punkt på nivåkurvan $F(x, y, z) = 0$. Om $F'_z(a) \neq 0$ så finns en öppen omgivning U kring a sådan att restriktionen av nivåkurvan $F(x, y, z) = 0$ till U implicit definierar en C^1 -funktion $z = f(x, y)$. För derivatorna av f gäller

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}. \quad (9.2)$$

och

$$f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}. \quad (9.3)$$

BEVIS: Låt oss bevisa att om existensen av $z = f(x, y)$ är klar så gäller formeln (9.2). I detta fall har vi $F(x, y, f(x, y)) = 0$ och derivation med avseende på x ger enligt kedjeregeln

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, f(x)) = F'_x(x, y, f(x)) + F'_z(x, y, f(x, y))f'_x(x, y) = 0$$

som visar formeln. ■

Exempel 9.2. Visa (med hjälp av implicita funktionssatsen) att villkoren

$$y^3 - 3y = x, \quad y(0) = 0$$

entydigt definierar $y = y(x)$ nära origo och bestäm Taylorutvecklingen

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + x^3B(x),$$

kring origo.

LÖSNING: Bilda $F(x, y) = y^3 - 3y - x$. Vi kan lösa ut y som funktion av x i punkten $(0, 0)$ om $F'_y(0, 0) \neq 0$. Vi har $F'_y(x, y) = 3y^2 - 3$ och därmed $F'_y(0, 0) = -3 \neq 0$. Låt $y = y(x)$ i en omgivning kring $(0, 0)$. Vi har att

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2} + x^3B(x),$$

där B är en begränsad funktion i en omgivning av origo. Implicit derivering ger

$$3y(x)^2y'(x) - 3y'(x) = 1$$

och därmed är $y'(0) = -1/3$. Upprepad implicit derivering ger

$$6y(x)y'(x)^2 + 3y(x)^2y''(x) - 3y''(x) = 0$$

och att $y''(0) = 0$. Alltså är

$$y(x) = -\frac{x}{3} + x^3B(x),$$

där B är en begränsad funktion i en omgivning av origo. ▲

Exempel 9.3. Kring vilka punkter (a, b, c) på ytan

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = 224 \tag{9.4}$$

kan man lösa ut $z = f(x, y)$ så att f får ett lokalt minimum i (a, b) .

LÖSNING: Från Implicita funktionssatsen 9.1 är en sådan funktion f garanterad att finnas lokalt kring punkter på nivåytan som uppfyller att

$$F'_z(x, y, z) = 4z^3 - 4xy \neq 0, \tag{9.5}$$

vilket är detsamma som $z^3 \neq xy$. Läsaren kan verifiera att i de punkter där $F'_z(x, y, z) = 0$ gäller att $F'_x(x, y, z) \neq 0$ eller $F'_y(x, y, z) \neq 0$. Med andra ord kan x eller y beskrivas som funktion av de övriga variablerna. Eftersom nivåytans normalvektor i (x, y, z) ligger i xy -planet så kan inte en funktion $z = f(x, y)$ finnas som har ett minvärde i (x, y) .

Låt därför (x, y, z) vara en punkt på nivåytan $F(x, y, z) = 224$ sådan att $z^3 \neq xy$ och låt f vara den funktion som uppfyller att $z = f(x, y)$ lokalt kring (x, y, z) .

Vi undrar nu vilka kriterier på (x, y) som ska gälla för att f ska ha en stationär punkt i (x, y) . Vi söker (x, y) så att $(\nabla f)(x, y) = 0$, vi får

$$\begin{cases} f'_x(x, y) &= -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_y(x, y, f(x, y))} = -\frac{x^3 - yz}{z^3 - xy}, \\ f'_y(x, y) &= -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))} = -\frac{y^3 - xz}{z^3 - xy}. \end{cases} \quad (9.6)$$

Vi har att $(\nabla f)(x, y) = 0$ om och endast om $x = y = 0$ eller $z = x^3/y = y^3/x$. Notera att relation mellan $z = x^3/y = y^3/x$ endast gäller i stationära punkter.

Ekvationen $x^3/y = y^3/x$ är ekvivalent med $(x - y)(x + y) = 0$, vilket ger att $y = x$ eller $y = -x$. Vi söker alltså de punkter (x, y, z) som är sådana att $y = \pm x$ och $z = x^3/y$ som ligger på nivåytan $F(x, y, z) = 224$.

Antag först att $x = y = t$ och $z = x^3/y = t^2$. Vi har att

$$F(t, t, t^2) = t^4 + t^4 + t^8 - 4t^4 = 224,$$

vilket har lösningen $t = \pm 2$. Alltså får vi de stationära punkterna $(2, 2)$ och $(-2, -2)$.

Antag nu att $x = -y = t$ och $z = x^3/y = -t^2$. Vi har att

$$F(t, -t, -t^2) = t^4 + t^4 + t^8 - 4t^4 = 224,$$

vilket återigen har lösningen $t = \pm 2$. Alltså får vi de stationära punkterna $(-2, 2)$ och $(2, -2)$.

Slutligen om $x = y = 0$ så får vi z genom ekvationen $F(0, 0, z) = 224$, vilket ger $z = 224^{1/4}$.

Vi har alltså hittat de fem stationära punkterna

$$\{(-2, -2), (-2, 2), (2, 2), (2, -2), (0, 0)\}.$$

För att avgöra karaktären på dessa studerar vi de kvadratiske formerna i Taylorutvecklingen kring punkterna. Låt först $(a, b) = (2, 2)$, vi har då att $z = f(2, 2) = 4$. Den kvadratiske formen ges av

$$Q_{(2,2)}(h, k) = f''_{xx}(2, 2)h^2 + 2f''_{xy}(2, 2)hk + f''_{yy}(2, 2)k^2.$$

Vi kan bestämma de okända derivatorna genom implicit derivering av uttrycket $F(x, y, f(x, y)) = 224$. Vi får att

$$x^4 + y^4 + f(x, y)^4 - 4xyf(x, y) = 224, \quad (9.7)$$

och med hjälp av derivation med avseende på x och division med 4 får vi

$$x^3 + f(x, y)^3 f'_x(x, y) - yf(x, y) - xyf'_x(x, y) = 0, \quad (9.8)$$

vilket är ekvivalent med första likheten i (9.6). Om vi nu återigen deriverar med avseende på x får vi

$$3x^2 + 3f^2(f'_x)^2 + f^3 f''_{xx} - yf'_x - yf'_x - xyf''_{xx} = 0. \quad (9.9)$$

Om vi nu utnyttjar att $f'_x(2, 2) = f'_y(2, 2) = 0$ eftersom $(2, 2)$ är en stationär punkt till f så får vi att

$$12 + 64f''_{xx}(2, 2) - 4f''_{xx}(2, 2) = 0 \quad (9.10)$$

eller

$$f''_{xx}(2, 2) = -\frac{1}{5}. \quad (9.11)$$

Av symmetriskäl blir även

$$f''_{yy}(2, 2) = -\frac{1}{5}. \quad (9.12)$$

För att bestämma $f''_{xy}(2, 2)$ utgår vi från (9.8) och deriverar med avseende på y ,

$$3f^2 f'_y f'_x + f^3 f''_{xy} - f - y f'_y - x f'_x - xy f''_{xy} = 0.$$

Vi får

$$64f''_{xy}(2, 2) - 4 - 4f''_{xy}(2, 2) = 0,$$

vilket ger

$$f''_{xy}(2, 2) = \frac{1}{15}.$$

Vi kan nu beskriva $Q_{(2,2)}$ explicit genom

$$Q_{(2,2)}(h, k) = -\frac{1}{5}h^2 + \frac{2}{15}hk - \frac{1}{5}k^2 = -\frac{1}{5}(h - k/3)^2 - \frac{8}{45}k^2.$$

Eftersom $Q_{(2,2)}$ är negativt definit så har f ett lokalt maximum i punkten $(2, 2)$.

Det visar sig med liknande uträkningar att $Q_{(-2,-2)} = Q_{(2,2)}$ och att

$$Q_{(2,-2)}(h, k) = Q_{(-2,2)}(h, k) = \frac{1}{5}h^2 + \frac{2}{15}hk + \frac{1}{5}k^2 = \frac{1}{5}(h + k/3)^2 + \frac{8}{45}k^2,$$

vilket ger att f har en lokalt minimum i punkterna $(2, -2)$ och $(-2, 2)$.

Läsaren kan själv verifiera att då $(a, b) = (0, 0)$ så gäller att $f(0, 0) =$

$$f''_{xx}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0) = 0$$

och att

$$f''_{xy}(0, 0) = \frac{1}{f(0, 0)^2} = \frac{1}{\sqrt{224}}.$$

Detta leder till en kvadratisk form som är indefinit och f har alltså en sadelpunkt i $(0, 0)$. ▲

9.2 Optimering av kontinuerliga funktioner på kompakta mängder

Låt f vara en kontinuerlig reellvärd funktion definierad på en kompakt delmängd K av $\mathbb{R}^n$. Enligt sats 2.14 så har f ett största och minsta värde. Låt $p \in K$ vara en extrempunkt. Om p är en inre punkt och f är partiellt deriverbar i p så gäller att $(\nabla f)(p) = 0$, dvs p är en stationär punkt.

Sökandet efter max- och minpunkter för f behöver därför endast ske bland följande kandidater

- a) stationära punkter,
- b) icke-deriverbara punkter,
- c) randen.

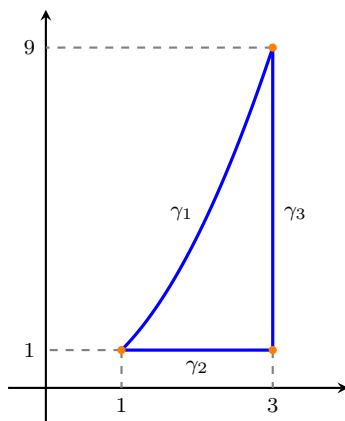
Här kan undersökning av randen leda till en iteration av förfarandet.

Exempel 9.4. Bestäm största och minsta värde för

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y - 4}{x^2 y}$$

i det slutna, begränsade område som begränsas av kurvorna $y = x^2$, $y = 1$ och $x = 3$.

LÖSNING:



Vi söker först stationära punkter,

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \frac{2x^3 y - (x^2 + 2y - 4)2xy}{x^4 y^2} = 0 \\ f'_y(x, y) = \frac{2x^2 y - (x^2 + 2y - 4)2x^2}{x^4 y^2} = 0 \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{cases} 4 - 2y = 0 \\ 4 - y - x^2 = 0. \end{cases}$$

Här är $y = 2$ och $x = \pm 2$, men bara punkten $(2, 2)$ ligger i området. Vi får kandidaten $f(2, 2) = 1/2$.

Låt oss bestämma värdena i hörnen: $f(1, 1) = -1$, $f(3, 1) = 7/9$ och $f(3, 9) = 25/81$.

Det återstår att bestämma stationära punkter på randen. Vi börjar med

$$\gamma_1 = \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 3\}.$$

Låt

$$\varphi_1(t) = f(t, t^2) = \frac{3t^2 - 4}{t^4}$$

och

$$\varphi_1'(t) = \frac{6t^5 - 4t^3(3t^2 - 4)}{t^8} = \frac{2(8 - 3t^2)}{t^5} = 0$$

om och endast om $t = \sqrt{8/3}$, vilket ger

$$\varphi_1(\sqrt{8/3}) = \frac{9}{16}.$$

Nu till

$$\gamma_2 = \{(t, 1) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 3\}.$$

Låt

$$\varphi_2(t) = f(t, 1) = \frac{t^2 - 2}{t^2} = 1 - \frac{2}{t^2}.$$

Eftersom φ_2 är växande saknas stationära punkter. Sist studerar vi

$$\gamma_3 = \{(3, t) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 9\}.$$

Låt

$$\varphi_2(t) = f(3, t) = \frac{5 + 2t}{9t} = \frac{2}{9} + \frac{5}{9t}$$

som är avtagande och saknar därmed stationära punkter.

Alltså är största värdet $7/9$ och minsta värdet -1 . ▲

9.3 Optimering av kontinuerliga funktioner på icke-kompakta mängder

Låt f vara en kontinuerlig reellvärd funktion definierad på en sluten obegränsad mängd Ω . Med hjälp av att begränsa Ω till en kompakt mängd K så kan vi nyttja metodiken från föregående kapitel. Därefter behöver f på delen $\Omega \setminus K$ studeras. Ett exempel på en sådan uppdelning är att låta

$$K = \Omega \cap \overline{B_R},$$

vilket är delen av Ω innanför en sluten boll med radien R .

Exempel 9.5. Bestäm det största värdet av funktionen

$$f(x, y) = (x^2 + y)e^{-x-y}$$

i området $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

LÖSNING: Vi ser direkt att minsta värdet är noll eftersom $f(x, y) \geq 0$ och $f(0, 0) = 0$.

Låt $K = \Omega \cap \overline{B_R}$, för något stort R .

Vi söker stationära punkter på f på K . Vi får

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = (2x - x^2 - y)e^{-x-y} = 0 \\ f'_y(x, y) = (1 - x^2 - y)e^{-x-y} = 0 \end{cases}$$

vilket ger punkten $(1/2, 3/4)$. Här är värdet $f(1/2, 3/4) = e^{-5/4}$.

Eftersom f saknar icke-deriverbara punkter så behöver vi undersöka randen av K . Vi börjar med $\gamma_1 = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq R\}$ och definierar $\varphi_1 : \gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$\varphi_1(t) = f(t, 0) = t^2 e^{-t}.$$

Vi har att $\varphi_1(0) = f(0, 0) = 0$ och att $\varphi_1(R) = R^2 e^{-R} \rightarrow 0$, då $R \rightarrow \infty$. Vi söker stationära punkter för φ_1 ,

$$\varphi_1(t) = (2t - t^2)e^{-t} = 0,$$

vilket ger $t = 2$ som enda värde i det inre av γ_1 . Värdet där är $\varphi_1(2) = 4e^{-2}$.

Nu till $\gamma_2 = \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq R\}$ och definierar $\varphi_2 : \gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$\varphi_2(t) = f(0, t) = te^{-t}.$$

Vi har att $\varphi_2(0) = f(0, 0)$ redan är behandlat och att $\varphi_2(R) = Re^{-R} \rightarrow 0$, då $R \rightarrow \infty$. Vi söker stationära punkter för φ_2 ,

$$\varphi_2(t) = (1 - t)e^{-t} = 0,$$

vilket ger $t = 1$ och $\varphi_2(1) = e^{-1}$.

Låt nu $(x, y) \in \Omega \setminus K$. Genom polärt koordinatbyte $x = r \cos \theta$ och $y = r \sin \theta$ med $r > R$ och $\theta \in [0, \pi/2]$ kan vi beskriva

$$0 \leq f = (r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta)e^{-r(\cos \theta + \sin \theta)} \leq r^2 e^{-r/\sqrt{2}} \rightarrow 0,$$

då $R \rightarrow \infty$. Här har vi nyttjat att $\cos \theta + \sin \theta \geq 1/\sqrt{2}$ för $\theta \in [0, \pi/2]$.

Vi kan alltså välja R stort så att f utanför B_R är godtyckligt nära noll. Detta medför att största värdet är $4e^{-2}$ och minsta värdet är 0. $\blacktriangle$

9.4 Övningar

Övning 9.1. [2022-06-08, uppgift 2, 56%] Visa att ekvationen

$$\sin(xy) - \ln(x+y) = 0$$

lokalt kring punkten $(0, 1)$ definierar y som en kontinuerligt deriverbar funktion av x och beräkna

$$\frac{dy}{dx}(0).$$

Övning 9.2. [2023-03-17, uppgift 2, 83%]

Visa att funktionen

$$f(x, y) = \frac{4y + 3}{1 + x^2 + y^2},$$

har ett största och minsta värde på $\mathbb{R}^2$ och bestäm dessa värden.

Övning 9.3. [2023-03-17, uppgift 3, 72%] Visa att ekvationen $x^6 + y^6 + x^2 + y^2 = 0$ i en omgivning av $(0, 0)$ entydigt definierar en funktion $y = f(x)$. Bestäm $f''(0)$ och visa att $x = 0$ är en lokal maxpunkt för f . Ni kan anta att f är oändligt deriverbar.

Övning 9.4. [2023-04-14, uppgift 3, 76%] Bestäm det största och minsta värdet av

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4\ln(x + y),$$

då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $1 \leq x + y \leq 4$.

Övning 9.5. [2023-04-14, uppgift 4, 61%]

Ytan Y ges av ekvationen $\ln z + x + 2 = xy + 2z$.

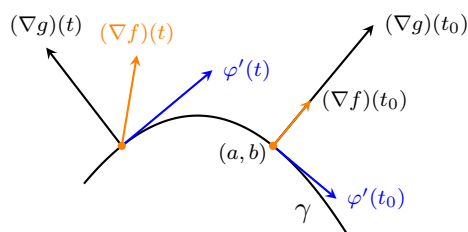
- Visa att det finns en funktion f så att ytan kan beskrivas som $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 1)$.
- Antag att $f \in C^3$ och bestäm Taylorutvecklingen av f av grad 2.

10 Optimering med bivillkor

10.1 Inledande exempel i $\mathbb{R}^2$

Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara av klass C^1 där $D \subset \mathbb{R}^2$. Vi vill finna extrempunkter till f under bivillkoret att (x, y) även ska uppfylla ekvationen $g(x, y) = 0$, för någon reellvärd funktion $g \in C^1(D)$. Ett exempel på ett sådant problem är att beräkna avståndet till origo från kurvan $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$. Funktionen f som ska optimeras är avståndet till origo och bivillkoret kan beskrivas genom funktionen $g(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$.

För att lösa ovanstående problem ska vi göra några observationer. Låt först $\gamma = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\}$ och $(a, b) \in \gamma$ vara en lokal extrempunkt för $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Givet att $(\nabla g)(a, b) \neq 0$ så garanterar implicita funktionssatsen att γ kring (a, b) kan parametreras med en deriverbar funktion $\varphi = \varphi(t)$ där $\varphi(t_0) = (a, b)$. Således får vi att envariabelfunktionen $t \mapsto f(\varphi(t))$ har en lokal extrempunkt i t_0 och därmed är $(f \circ \varphi)'(t_0) = 0$.



Kedjeregeln ger oss

$$\left(\frac{d}{dt}(f \circ \varphi) \right)(t_0) = (\nabla f)(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) = 0,$$

och eftersom $\varphi'(t_0)$ är en tangentvektor till γ i (a, b) så gäller att $(\nabla f)(a, b)$ är ortogonal mot γ . Eftersom γ är en nivåkurva för funktionen g så gäller även att $(\nabla g)(a, b)$ är ortogonal mot γ . Alltså gäller att $(\nabla f)(a, b)$ och $(\nabla g)(a, b)$ är parallella, d.v.s.

$$(\nabla f)(a, b) = \lambda(\nabla g)(a, b), \quad (10.1)$$

för något $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exempel 10.1. Beräkna kortaste och längsta avståndet till origo från kurvan $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$.

LÖSNING: Låt oss välja att minimera $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $g(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100$. Enligt (10.1) får vi att en extrempunkt (x, y) måste uppfylla

$$\begin{cases} 2x = \lambda(34x + 12y) \\ 2y = \lambda(12x + 16y) \\ 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0 \end{cases}$$

De två första ekvationerna ger att $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$. Tillsammans med den tredje ekvationen får vi $25x^2 = 100$, vilket ger $x = \pm 2$. Då $x = 2$ får vi $y = 1$ eller $y = -4$ och då $x = -2$ får vi $y = -1$ eller $y = 4$. Maximum och minimum finns alltså bland värdena

$$f(2, 1) = f(-2, -1) = 5, \quad f(2, -4) = f(-2, 4) = 20.$$

Kortaste avståndet är alltså $\sqrt{5}$ och längsta avståndet är $\sqrt{20}$. ▲

10.2 Bivillkor i $\mathbb{R}^3$

Låt oss nu studera fallet med ett bivillkor i $\mathbb{R}^3$. Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ och $f \in C^1(D)$. Vi vill optimera f över alla punkter i D som uppfyller att de finns på nivåytan $g(x) = 0$, där $g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Antag att restriktionen av f till nivåytan $g(x) = 0$ har ett extremvärde i $a \in D$. Låt $t \mapsto \varphi(t)$ vara en godtycklig kurva i nivåytan, d.v.s. $g(\varphi(t)) = 0$, med $a = \varphi(t_0)$. Eftersom sammansättningen $t \mapsto f(\varphi(t))$ har ett extremvärde för $t = t_0$ gäller att

$$\left(\frac{d}{dt}(f \circ \varphi) \right) (t_0) = (\nabla f)(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) = 0.$$

Alltså är $(\nabla f)(a)$ ortogonal mot alla kurvors riktningsvektorer i nivåytan vid punkten a . Därmed är $(\nabla f)(a)$ och normalvektorn till nivåytan $(\nabla g)(a)$ linjärt beroende.

Låt oss nu ha två bivillkor $g_1(x) = g_2(x) = 0$. Skärningen av dessa nivåytor bildar en kurva som vi kan parametrisera med en funktion $\varphi = \varphi(t)$. Låt $a = \varphi(t_0)$. Samma uträkning som ovan ger att $(\nabla f)(a)$ är ortogonal mot kurvans riktningsvektor $\varphi'(t_0)$. Eftersom kurvan $t \mapsto \varphi(t)$ ligger i båda nivåytorna $g_1(x) = g_2(x) = 0$ så är normalvektorerna till dessa också ortogonala mot kurvan. De tre vektorerna $(\nabla f)(a)$, $(\nabla g_1)(a)$ och $(\nabla g_2)(a)$ ligger alltså i samma två dimensionella plan och är därför linjärt beroende.

10.3 Allmänna fallet

Sats 10.2. Låt $f, g_1, \dots, g_p \in C^1(D)$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ är öppen och låt f_r vara restriktionen av f till $\Omega = N_1 \cap \dots \cap N_p$, där $N_j = \{x \in D: g_j(x) = 0\}$. Låt $a \in D$ vara en extrempunkt för f_r , då gäller att

$$(\nabla f)(a), (\nabla g_1)(a), \dots, (\nabla g_p)(a) \tag{10.2}$$

är linjärt beroende.

BEVIS: Vi börjar med fallet då $p = n - 1$. Låt oss använda ett motsägelsebevis. Anta att vektorerna i (10.2) är linjärt oberoende. Bilda funktionen $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sådan att

$$F(x) = (f(x), g_1(x), \dots, g_{n-1}(x)).$$

Eftersom (10.2) direkt leder till att funktionaldeterminanten $\det F'(a) \neq 0$ så ger Inversa funktionssatsen (se 8.9) att det finns öppna mängder U kring a och V kring $F(a) = (f(a), 0, \dots, 0)$ sådana att restriktionen $F: U \rightarrow V$ är inverterbar. Alltså finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att linjestycket från $(f(a) - \varepsilon, 0, \dots, 0)$ till $(f(a) + \varepsilon, 0, \dots, 0)$ är en delmängd av V . Alla punkter $x \in U$ som avbildas på detta linjestycke uppfyller alla bivillkor, d.v.s. att $x \in \Omega$. Detta motsäger att $f(a)$ är ett extremvärde.

Antag nu att $p < n - 1$. Antag återigen att vektorerna i (10.2) är linjärt oberoende. Vi kan då komplettera dessa med vektorerna $v_{p+1}, \dots, v_{n-1}$ så att de bildar en bas i $\mathbb{R}^n$. Sätt $g_i(x) = (x - a)v_i$ för $p + 1 \leq i \leq n - 1$. Observera att $g_i(a) = 0$ och $(\nabla g_i)(a) = v_i$. Vi kan nu använda den första delen av satsen och få en motsägelse. Vi är klara. ■

10.4 Övningar

Övning 10.1. [2022-06-08, uppgift 5, 51%] Bestäm det minsta värdet av

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

då $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$.

Övning 10.2. [2023-06-07, uppgift 1, 74%] Beräkna det största värdet som uttrycket $xy\sqrt{z}$ kan anta då x, y och z är positiva tal och $x + y + z = 1$.

Övning 10.3. [2023-06-04, uppgift 4, 39%] Bestäm det största värdet av $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ då x, y, z är vinklarna i en triangel.

11 Integration över rektanglar

11.1 Dubbelintegraler av enkla funktioner

Definition 11.1. Låt $\Psi : D \rightarrow \mathbb{R}$, med $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att Ψ är en **enkel funktion** om dess värdemängd består av ändligt antal värden.

Låt $(x_i)_{i=0}^n$ och $(y_j)_{j=0}^m$ vara uppdelningar av intervallen $[a, b]$ och $[c, d]$, d.v.s. växande följder av tal sådana att $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$ och $y_m = d$. Vi låter

$$\Delta_{i,j} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x < x_i, y_{j-1} \leq y < y_j \right\} \quad (11.1)$$

och låter $\mu(\Delta_{i,j}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Låt Ψ vara en enkel funktion på rektangeln

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d \right\} \quad (11.2)$$

sådan att

$$\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} \chi_{i,j}(x, y) \quad (11.3)$$

där $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ och

$$\chi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Delta_{i,j} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases} \quad (11.4)$$

Låt oss kalla en sådan funktion Ψ för en **enkel rektangulär funktion**. Integralen för Ψ definieras som

$$\iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} \mu(\Delta_{i,j}). \quad (11.5)$$

Notera att förfiningar av uppdelningen inte påverkar integralens värde.

Följande räkneregler är enkla att verifiera på förfiningar av uppdelningarna.

Sats 11.2. Låt Φ och Ψ vara enkla rektangulära funktioner på rektangeln (11.2). Då gäller att

a) för varje $\alpha \in \mathbb{R}$ har vi

$$\iint_{\Delta} \alpha \Psi(x, y) \, dx dy = \alpha \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy,$$

b) på den gemensamma uppdelningen gäller

$$\iint_{\Delta} (\Phi(x, y) + \Psi(x, y)) \, dx dy = \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy + \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy,$$

c) om $\Phi \leq \Psi$ så har vi

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy.$$

d)

$$\left| \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\Psi(x, y)| \, dx dy,$$

BEVIS: Vi väljer att visa d).

Vi har att $-\Psi(x, y) \leq |\Psi(x, y)|$ och $\Psi(x, y) \leq |\Psi(x, y)|$. Från c) har vi att

$$\pm \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Delta} |\Psi(x, y)| \, dx dy, \quad (11.6)$$

vilket är detsamma som

$$\left| \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\Psi(x, y)| \, dx dy.$$

■

Notera att vi för fixerat x kan integrera $\varphi(y) = \Psi(x, y)$ med avseende på y och får

$$L_x = \int_c^d \varphi(y) \, dy$$

som kan integreras med avseende på x , vilket ger

$$\iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy = \int_a^b L_x(x) \, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx.$$

11.2 Integration över rektanglar

Definition 11.3. Låt $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, där

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d\}. \quad (11.7)$$

Bilda mängderna

$$L = \left\{ \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy : \Phi \leq f, \Phi \text{ enkel rektangulär funktion} \right\}$$

och

$$U = \left\{ \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy : \Psi \geq f, \Psi \text{ enkel rektangulär funktion} \right\}.$$

Om $\sup L = \inf U$ så sägs f vara **Riemannintegrerbar** på Δ eller **integrerbar** på Δ och

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy = \sup L.$$

Räknereglererna i sats 11.2 kan nu utvidgas till Riemannintegrerbara funktioner.

Sats 11.4. Om f är integrerbar över rektangeln

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d\} \quad (11.8)$$

så gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \quad (11.9)$$

givet att högerleden är definierade.

BEVIS: Låt Ψ vara en enkel rektangulär funktion över Δ som uppfyller att $f \leq \Psi$. Alltså gäller

$$\int_c^d f(x, y) \, dy \leq \int_c^d \Psi(x, y) \, dy, \quad (11.10)$$

för $a \leq x \leq b$ och

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \leq \int_a^b \left(\int_c^d \Psi(x, y) \, dy \right) dx = \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy.$$

På samma sätt får vi att

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \geq \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy,$$

där Φ är en enkel rektangulär funktion över Δ som uppfyller $f \geq \Phi$.

Detta medför att

$$\sup L \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \leq \inf U,$$

där L och U ges av definition 11.3. Eftersom f är integrerbar över Δ så följer (11.9). ■

Exempel 11.5. Låt oss visa att vänsterledet i sats 11.4 kan existera men att så inte gäller för högerledet. Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = 0, x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

och notera att från envariabelanalysen vet vi att

$$\int_0^1 f(x, 0) \, dx$$

inte existerar. Men, $\Phi(x, y) = 0$ och

$$\Psi_n(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1/n \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

uppfyller att de är enkla funktioner med egenskapen att $\Phi \leq f \leq \Psi_n$, för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi får att

$$0 = \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Delta} \Psi_n(x, y) \, dx dy = 1/n \rightarrow 0,$$

då $n \rightarrow 0$. Alltså existerar vänsterledet.

▲

Definition 11.6. En funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara **likformigt kontinuerlig** om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ för varje $x, y \in D$ som uppfyller att $|x - y| < \delta$.

Sats 11.7. Låt $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, där K är en kompakt delmängd av $\mathbb{R}^n$. Om f är kontinuerlig så är f likformigt kontinuerlig.

Sats 11.8. Om f är en reellvärd, kontinuerlig funktion på en rektangel Δ så är f integrerbar över Δ .

BEVIS: Eftersom f är kontinuerlig och Δ är kompakt så gäller att f är likformigt kontinuerlig över Δ .

Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns enkla rektangulära funktioner Φ och Ψ som uppfyller att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och

$$\iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy < \varepsilon. \quad (11.11)$$

Vår konstruktion är enligt följande. Eftersom f är likformigt kontinuerlig så finns det ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \quad (11.12)$$

givet att $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta$.

Dela in Δ i små rektanglar Δ_i sådana att diagonalen är mindre än δ och låt

$$M_i = \max_{(x, y) \in \Delta_i} f(x, y) \\ m_i = \min_{(x, y) \in \Delta_i} f(x, y).$$

Alltså är

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}.$$

Definiera $\Psi(x, y) = M_i$, då $(x, y) \in \Delta_i$ och $\Phi(x, y) = m_i$, då $(x, y) \in \Delta_i$. Vi är klara ty

$$\iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \leq \sum_i (M_i - m_i) \mu(\Delta_i) < \varepsilon. \quad (11.13)$$

■

Sats 11.9. Om f är kontinuerlig över

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (11.14)$$

så gäller att

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

BEVIS: Enligt sats 11.4 behöver vi endast visa att högerleden existerar.

Fixera $x \in [a, b]$ och notera att $y \mapsto f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion på intervallet $[c, d]$. Därför existerar

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

för $x \in [a, b]$.

Om vi kan visa att A är en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$ så existerar

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad (11.15)$$

och vi är klara.

Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett $\delta > 0$ sådant att $|A(x_1) - A(x_2)| < \varepsilon$ då $|x_1 - x_2| < \delta$.

Eftersom f är likformigt kontinuerlig så finns det ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}$$

för varje $|(x_1, y) - (x_2, y)| = |x_1 - x_2| < \delta$. Alltså gäller

$$\begin{aligned} |A(x_1) - A(x_2)| &= \left| \int_c^d (f(x_1, y) - f(x_2, y)) dy \right| \\ &\leq \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)| dy \\ &< \int_c^d \frac{\varepsilon}{d - c} dy = \varepsilon \end{aligned}$$

och vi är klara. ■

Exempel 11.10. Beräkna

$$\iint_{[0,2] \times [0,1]} x^2 \sin y \, dx dy.$$

LÖSNING: Enligt sats 11.9 har vi

$$\begin{aligned} \iint_{[0,2] \times [0,1]} x^2 \cos(xy) \, dx dy &= \int_0^2 x \left(\int_0^1 x \cos(xy) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^2 x \left[\sin(xy) \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^2 x \sin x \, dx \\ &= \sin 2 - 2 \cos 2. \end{aligned}$$

Det sista följer från partiell integration. ▲

12 Integration över begränsade mängder

Vi vill nu utvidga vår definition av integrerbarhet till begränsade funktioner på allmänna begränsade mängder.

Definition 12.1. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion och $D \subset \mathbb{R}^2$ vara begränsad. Låt

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , (x, y) \in D \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases}$$

Vi säger att funktionen f är **integrerbar** på D om f_D är integrerbar på någon rektangel Δ sådan att $D \subset \Delta$. Vi sätter

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} f_D(x, y) \, dx dy. \quad (12.1)$$

Definition 12.2. En mängd $\Omega \in \mathbb{R}^2$ kallas en **nollmängd** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns rektanglar Δ_i sådana att

$$\Omega \subset \bigcup_i \Delta_i \quad \text{och} \quad \sum_i \mu(\Delta_i) < \varepsilon,$$

där $\mu(\Delta_i)$ beskriver arean av rektangeln Δ_i .

Exempel 12.3. Linjestycket L från $(1, 0)$ till $(2, 0)$ är en nollmängd, ty för givet $\varepsilon > 0$ finns rektangeln

$$\Delta_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \varepsilon \leq x \leq 2 + \varepsilon, |y| \leq \varepsilon/(4(1 + 2\varepsilon))\}$$

som uppfyller att $L \subset \Delta_1$ och $\mu(\Delta_1) = \varepsilon/2 < \varepsilon$. ▲

Lemma 12.4. *Grafen till en kontinuerlig funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är en nollmängd i planet.*

BEVIS: Eftersom f är en kontinuerlig funktion på ett kompakt intervall så är f likformigt kontinuerlig på intervallet. Alltså gäller att för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

för varje $x_1, x_2 \in [a, b]$ som uppfyller $|x_1 - x_2| < \delta$.

Välj δ sådant att det finns ett heltal n med egenskapen att $n\delta = 2(b-a)$, vilket ger att vi kan dela in $[a, b]$ i n stycken $\delta/2$ långa intervall. Eftersom funktionsvärdena högst skiljer sig med $\varepsilon/2(b-a)$ kan vi täcka grafen i varje delintervall med en rektangel med höjden $\varepsilon/2(b-a)$ och bredden $\delta/2$. Alltså får vi att den sammanlagda arean är

$$\frac{n\delta}{2} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definition 12.5. En mängd D kallas **kvadrerbar** om dess rand är en noll-mängd.

Lemma 12.6. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en likformigt kontinuerlig funktion och låt D vara kvadrerbar. Då gäller att f är integrerbar över D .

Definition 12.7. Vi definierar **arean** av en kvadrerbar mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ som

$$\mu(D) = \iint_D 1 \, dx dy.$$

Sats 12.8. Låt α och β vara kontinuerliga funktioner på $[a, b]$,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \right\}.$$

och f vara kontinuerlig på D . Då gäller att f är integrerbar på D och

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Sats 12.9 (Medelvärdessatsen). Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett kompakt, kvadrerbart och bågvisst sammanhängande område D , då gäller att det finns en punkt $(a, b) \in D$ sådan att

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = f(a, b) \mu(D).$$

BEVIS: Låt

$$m = \min_{(x, y) \in D} f(x, y) \quad M = \max_{(x, y) \in D} f(x, y).$$

Alltså har vi $m \leq f(x, y) \leq M$ för alla $(x, y) \in D$. Låt oss integrera över D , vilket ger

$$m \mu(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq M \mu(D)$$

eller

$$m \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq M.$$

Satsen om mellanliggande värde ger att det finns en punkt $(a, b) \in D$ som uppfyller att

$$f(a, b) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) \, dx dy,$$

vilket visar satsen. ■

13 Riemannsummor och variabelbyten i integratler

13.1 Riemannsummor

Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en kompakt mängd, $\{D_j\}$ vara en disjunkt indelning av D , d.v.s.

$$D = \bigcup_j D_j$$

och

$$D_i \cap D_j = \emptyset$$

då $i \neq j$ och låt D och D_j vara kvadrerbara. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, vi säger att

$$\sum_j f(p_j) \mu(D_j), \quad (13.1)$$

där $p_j \in D_j$ är en **Riemannsumma** för f över området D .

För att uttrycka nästa sats inför vi diametern av en mängd som

$$\text{diam}(D) = \sup_{x,y \in D} |x - y|.$$

Nästa sats säger att en Riemann summa är en approximation av integralen för f över D .

Sats 13.1. Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ så gäller att

$$\sum_j f(a_j, b_j) \mu(D_j) \rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy,$$

då $\max_j \text{diam}(D_j) \rightarrow 0$, där $\{D_j\}$ är en disjunkt indelning av D och $(a_j, b_j) \in D_j$.

BEVIS: Tag $\text{varepsilon} > 0$. Vi vill finna en indelning $\{D_j\}$ sådan att

$$\left| \sum_j f(a_j, b_j) \mu(D_j) - \iint_D f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon.$$

Eftersom f är kontinuerlig på den kompakta mängden D är f likformigt kontinuerlig på D . Detta ger att för talet $\varepsilon/\mu(D)$ finns det ett δ sådant att

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(D)}$$

för varje (x_1, y_1) och (x_2, y_2) som uppfyller att

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta.$$

Låt $\{D_j\}$ vara en indelning av D sådan att avståndet mellan varje par av punkter i D_j är mindre än δ . Vi har nu att för $(a_j, b_j) \in D_j$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_j f(a_j, b_j) \mu(D_j) - \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \\ &= \left| \sum_j f(a_j, b_j) \iint_{D_j} dx dy - \sum_j \iint_{D_j} f(x, y) \, dx dy \right| \\ &= \left| \sum_j \iint_{D_j} (f(a_j, b_j) - f(x, y)) \, dx dy \right| \end{aligned}$$

Nu nyttjar vi likformig kontinuitet och får

$$\left| \sum_j \iint_{D_j} (f(a_j, b_j) - f(x, y)) \, dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \sum_j \iint_{D_j} dx dy = \varepsilon$$

■

13.2 Variabelbyten i integraler

Exempel 13.2. Låt oss studera variabelbyten i envariabelanalysen. Låt $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ vara monoton och surjektiv. Vi utför variabelbytet $x = g(t)$, då gäller att om g är växande så har vi

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) \, dt = \int_\alpha^\beta f(g(t)) |g'(t)| \, dt$$

och om g är avtagande

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\beta^\alpha f(g(t)) g'(t) \, dt = \int_\alpha^\beta f(g(t)) (-g'(t)) \, dt = \int_\alpha^\beta f(g(t)) |g'(t)| \, dt$$

eftersom $-g'(t) = |g'(t)|$. Alltså har vi oberoende av om g är växande eller avtagande att

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) |g'(t)| \, dt.$$

▲

I flervariabelanalysen så ges faktorn $|g'(t)|$ av funktionaldeterminanten.

Sats 13.3. Låt D och E vara delmängder av $\mathbb{R}^2$ och $g : E \rightarrow D$ vara bijektiv sådan att funktionaldeterminanten

$$\frac{d(g)}{d(t)}(t) \neq 0, \quad (13.2)$$

för varje $t \in E$. Då gäller att om $x = g(t)$

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_E f(g_1(t_1, t_2), g_2(t_1, t_2)) \left| \frac{d(x_1, x_2)}{d(t_1, t_2)} \right| dt_1 dt_2$$

givet att integralerna är definierade.

13.3 Övningar

Övning 13.1. [2022-03-18, uppgift 4, 64%] Beräkna

$$\iint_Q xy \, dx dy$$

där

$$Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y - x \leq 1, y \geq 0\}$$

Övning 13.2. [2022-06-08, uppgift 3, 64%] Beräkna

$$\iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

där

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

14 Generaliserade integraler

14.1 Generaliserade integraler

Exempel 14.1. Låt $f(x, y) = xy(2 - xy)e^{-xy}$ och studera integralerna

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy \quad \text{och} \quad \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Vi får

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R xy(2 - xy)e^{-xy} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \lim_{R \rightarrow \infty} \left[x^2 y e^{-xy} \right]_0^R dy \\ &= \int_0^1 \lim_{R \rightarrow \infty} \left(R^2 y e^{-Ry} \right) dy \\ &= \int_0^1 0 dy = 0 \end{aligned}$$

medan

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left(\int_0^1 xy(2 - xy)e^{-xy} dy \right) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left[xy^2 e^{-xy} \right]_0^1 dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-R e^{-R} - e^{-R} + 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Vi inser att vi behöver en teori som håller. ▲

För fallet då vi har obegränsade funktioner och/eller över obegränsade mängder gör vi följande definition.

Definition 14.2. Låt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, vara en icke-negativ funktion.

Vi säger att

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

är **konvergent** om

$$M = \left\{ \iint_D f(x, y) dx dy : D \subset \Omega, D \text{ kompakt} \right\}$$

är uppat begränsad, annars **divergent**. Om I är konvergent så låter vi $I = \sup M$.

Sats 14.3. $I \in \mathbb{R}^2$ gäller följande

a)

$$\iint_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^a}$$

är konvergent om och endast om $a > 2$,

b)

$$\iint_{0<|x|<1} \frac{dx}{|x|^a}$$

är konvergent om och endast om $a < 2$.

BEVIS: Vi använder polära koordinater,

$$\iint_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^a} = 2\pi \int_1^\infty \frac{r dr}{r^a} = 2\pi \int_1^\infty \frac{dr}{r^{a-1}}$$

som är konvergent om och endast om $a - 1 > 1$, d.v.s. om $a > 2$.

På liknande vis får vi att

$$\iint_{0<|x|<1} \frac{dx}{|x|^a} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{a-1}}$$

är konvergent om och endast om $a < 2$. ■

Sats 14.4. Låt f och g vara reellvärda funktioner på en mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Antag att $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$, för varje $(x, y) \in \Omega$ och att

$$\iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$$

är konvergent. Då är

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

konvergent.

Genom att använda kontraposition, d.v.s. att för utsagor P och Q gäller att

$$P \rightarrow Q \quad \Longleftrightarrow \quad \neg Q \rightarrow \neg P,$$

får vi även

Sats 14.5. Låt f och g vara reellvärda funktioner på en mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Antag att $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$, för varje $(x, y) \in \Omega$ och att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

är divergent. Då är

$$\iint_{\Omega} g(x, y) dx dy$$

divergent.

Låt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Vi inför notationen

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , f(x, y) \geq 0 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases} \quad (14.1)$$

och

$$f^-(x, y) = \begin{cases} 0 & , f(x, y) \geq 0 \\ -f(x, y) & , \text{annars} \end{cases}. \quad (14.2)$$

Notera att både f^+ och f^- är icke-negativa funktioner och

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y) \quad (14.3)$$

och

$$|f(x, y)| = f^+(x, y) + f^-(x, y). \quad (14.4)$$

Definition 14.6. Låt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Vi säger att integralen

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$$

är konvergent om integralerna

$$\iint_{\Omega} f^+(x, y) \, dx dy \quad \text{och} \quad \iint_{\Omega} f^-(x, y) \, dx dy$$

är konvergenta. Vi låter då

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega} f^+(x, y) \, dx dy - \iint_{\Omega} f^-(x, y) \, dx dy.$$

14.2 Övningar

Övning 14.1. [2022-06-08, uppgift 8, 20%] Undersök om den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}} \, dx dy$$

är konvergent, där

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}.$$

Övning 14.2. [2022-06-07, uppgift 5, 28%] Avgör om integralen

$$\iint_D \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dx \, dy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ är konvergent.

Övning 14.3. [2022-06-04, uppgift 5, 19%] Bestäm den generaliserade integralen

$$\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{(x^3 y + 1)^2},$$

där $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, x^2 y > 1\}$.

15 Multipelintegraler och tillämpningar

15.1 Multipleintegraler

Enkla funktioner på rätblock

Låt $a_i < b_i$ för $i = 1, 2, \dots, n$ och definiera

$$\Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Låt $(x_{i,j})_{j=0}^{n_i}$ vara en uppdelning av intervallet $[a_i, b_i]$ på x_i -axeln, d.v.s. en växande följd av tal sådana att $x_{i,0} = a_i$ och $x_{i,n_i} = b_i$. Första indexet står alltså för vilken axel uppdelningen är på och det andra indexet berättar vilket delintervall vi har. Genom att välja delintervall j_i på x_i -axeln, för alla $i = 1, 2, \dots, n$, så får vi ett litet rätblock

$$\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{i, j_i - 1} \leq x_i \leq x_{i, j_i}\} \quad (15.1)$$

som har måttet

$$\mu(\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_n}) = \prod_{i=1}^n (x_{i, j_i} - x_{i, j_i - 1}). \quad (15.2)$$

Låt Ψ vara en enkel funktion på rätblocket Δ sådan att

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (15.3)$$

på rätblocket $\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_n}$, där konstanten $c_{j_1, j_2, \dots, j_n} \in \mathbb{R}$.

Låt oss kalla en sådan funktion Ψ för en **enkel rektangulär funktion**. Integralen för Ψ definieras som

$$\int \cdots \int_{\Delta} \Psi(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} c_{j_1, j_2, \dots, j_n} \mu(\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_n}), \quad (15.4)$$

där summan är över alla index j_i , som går över uppdelningen $[a_i, b_i]$, där $i = 1, 2, \dots, n$.

Utvidgning till allmänna funktioner på rätblock

Vi säger att en funktion $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar över Δ om $\sup L = \inf U$, där

$$L = \left\{ \int \cdots \int_{\Delta} \Phi(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n : f \geq \Phi, \Phi \text{ enkel rektangulär funktion} \right\}$$

och

$$U = \left\{ \int \cdots \int_{\Delta} \Psi(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n : f \leq \Psi, \Psi \text{ enkel rektangulär funktion} \right\}.$$

Om f är integrerbar över Δ så definieras

$$\int \cdots \int_{\Delta} f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sup L.$$

Utvidgning till allmänna mängder

Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ och definiera $f_D : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ för något rätblock Δ sådant att $D \subset \Delta$,

$$f_D(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in D \\ 0 & , x \notin D \end{cases} \quad (15.5)$$

Vi säger att f är integrerbar på D om f_D är integrerbar på Δ och låter

$$\int \cdots \int_D f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \cdots \int_\Delta f_D(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

15.2 Densitet

Låt D vara en kvadrerbar mängd i $\mathbb{R}^n$. Vi definierar **volymen** eller **måttet** av D som

$$\int \cdots \int_D dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (15.6)$$

Om $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ beskriver densiteten i $(x, y, z) \in D$ så har D massan

$$\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (15.7)$$

15.3 Area av ytor

Låt Y vara en yta i $\mathbb{R}^3$ som kan parametreras av $r : D \rightarrow Y$, där $D \subset \mathbb{R}^2$. Vi antar som tidigare att

$$N(s, t) = r'_s(s, t) \times r'_t(s, t) \neq 0$$

i varje punkt $(s, t) \in D$. Tangentplanet i $r(s, t)$ spänns då upp av $r'_s(s, t)$ och $r'_t(s, t)$. Vektorn $N(s, t)$ är en normalvektor till tangentplanet i (s, t) .

Vi kan approximera en liten del av ytan med en liten del av tangentplanet, d.v.s. arean av ytan mellan punkterna $r(s, t)$, $r(s + \Delta_s, t)$, $r(s, t + \Delta_t)$ och $r(s + \Delta_s, t + \Delta_t)$ approximeras av

$$|N(s, t)| = |(r'_s(s, t)\Delta_s) \times (r'_t(s, t)\Delta_t)| = |r'_s(s, t) \times r'_t(s, t)| \Delta_s \Delta_t.$$

Vi definierar **areaelementet** på Y som

$$dS = |r'_s(s, t) \times r'_t(s, t)| ds dt.$$

Definitionen ovan är endast meningsfull om följande sats gäller.

Sats 15.1. *Integralen*

$$\iint_Y dS$$

är oberoende av parameterframställning.

BEVIS: Antag att Y ges av $r = r(s, t)$, där $(s, t) \in D$ och av $x = x(u, v)$, där $(u, v) \in E$ och att det finns en bijektion $T : E \rightarrow D$. Alltså har vi att $(s, t) = T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v))$ och $r(s, t) = r(T(u, v)) = x(u, v)$.

Enligt kedjeregeln får vi

$$x'_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} (r(s, t)) = \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial u} + r'_t \frac{\partial t}{\partial u} \right)$$

och

$$x'_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} (r(s, t)) = \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial v} + r'_t \frac{\partial t}{\partial v} \right).$$

Vi har nu att

$$\begin{aligned} x'_u \times x'_v &= \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial u} + r'_t \frac{\partial t}{\partial u} \right) \times \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial v} + r'_t \frac{\partial t}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} (r'_s \times r'_t) + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} (r'_t \times r'_s) \\ &= \left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} \right) (r'_s \times r'_t) \\ &= \frac{d(s, t)}{d(u, v)} (r'_s \times r'_t) \end{aligned}$$

vilket ger

$$|x'_u \times x'_v| = \left| \frac{d(s, t)}{d(u, v)} \right| |r'_s \times r'_t|.$$

Alltså gäller att

$$\iint_E |x'_u \times x'_v| du dv = \iint_E \left| \frac{d(s, t)}{d(u, v)} \right| |r'_s \times r'_t| du dv = \iint_D |r'_s \times r'_t| ds dt,$$

vilket skulle visas. ■

Exempel 15.2. Beräkna arean av en sfär $S_3(R) \subset \mathbb{R}^3$ med radien R .

LÖSNING: Ytan kan ges av

$$r(\theta, \varphi) = R(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

över parametermängden $\{(\theta, \varphi) : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$.

Vi får

$$r'_\theta(\theta, \varphi) = R(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta)$$

och

$$r'_\varphi(\theta, \varphi) = R(-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0).$$

vilket ger normalvektorn

$$r'_\theta(\theta, \varphi) \times r'_\varphi(\theta, \varphi) = R^2(\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta + \cos \theta).$$

Areaelementet ges av

$$dS = |r'_\theta(\theta, \varphi) \times r'_\varphi(\theta, \varphi)| d\varphi d\theta = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta,$$

vilket ger att area ges av

$$\iint_{S_3(R)} dS = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi d\theta = 4R^2\pi.$$

▲

Exempel 15.3. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^2$. Ange en formel för beräkning av arean av funktionsytan Y , som ges av $z = f(x, y)$, där $(x, y) \in D$.

LÖSNING: Vi ser att (x, y) kan användas som parametrar till

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Vi har att $r'_x = (1, 0, f'_x)$, $r'_y = (0, 1, f'_y)$ och

$$r'_x \times r'_y = (-f'_x, -f'_y, 1).$$

Areaelementet blir

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$$

Formeln blir alltså

$$\iint_Y dS = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$

▲

15.4 Övningar

Övning 15.1. [2024-03-14, uppgift 2, 72%]

Beräkna integralen

$$\iiint_{\Omega} e^{-x^2-y^2-z} dx dy dz,$$

där $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$.

Övning 15.2. [2023-03-17, uppgift 4, 67%] Beräkna volymen av det området

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, x - y + z \leq 1, x^2 + y \leq 1\}.$$

Övning 15.3. [2023-06-07, uppgift 6, 42%] Beräkna volymen av det begränsade område som bildas mellan paraboloiden $z = 2x^2 + 5y^2$ och konen $z^2 = 2x^2 + 5y^2$.

Övning 15.4. [2024-03-14, uppgift 7, 25%] Låt a vara en positiv konstant. Beräkna arean av randen till mängden

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2, x^2 + y^2 \leq 2az\}.$$

Övning 15.5. [2024-06-04, uppgift 7, 20%] Beräkna volymen av det område i $\mathbb{R}^3$ som definieras genom $2xyz \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq 1$.

16 Kurvintegraler och Greens formel

16.1 Kurvintegraler

Låt $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, där $D \subset \mathbb{R}^2$, vara en kontinuerlig funktion. Vi kallar en sådan vektorvärd funktion för ett **vektorfält**. Låt $\gamma \subset D$ vara en orienterad C^1 -kurva med de bijektiva parameterframställningarna $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \gamma$ och $x : [a, b] \rightarrow \gamma$. Låt oss visa följande likhet

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b F(x(s)) \cdot x'(s) ds, \quad (16.1)$$

vilket säger att integralen i själva verket beror av den orienterade kurvan γ . Notera här att $F(r(t))$ och $r'(t)$ är vektorer och att integralen behandlar skalärprodukten av dessa.

Givet ett $p \in \gamma$ så finns ett unikt $t \in [\alpha, \beta]$ och $s \in [a, b]$ sådana att $p = r(t) = x(s)$. Låt φ vara den funktion som avbildar s på detta t , d.v.s. $\varphi(s) = t$. Vi har att $r(t) = r(\varphi(s)) = x(s)$. Från kedjeregeln får vi

$$x'(s) = \frac{d}{ds}(x(s)) = \frac{d}{ds}(r(\varphi(s))) = r'(\varphi(s))\varphi'(s)$$

och därmed är

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x(s)) \cdot x'(s) ds &= \int_a^b (F(r(\varphi(s))) \cdot r'(\varphi(s)))\varphi'(s) ds \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(s) \\ dt = \varphi'(s) ds \end{array} \right\} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} F(r(t)) \cdot r'(t) dt. \end{aligned}$$

Eftersom (16.1) gäller så kan vi introducera en parameteroberoende notation

$$\int_{\gamma} F \cdot dr, \quad (16.2)$$

där $dr = (dx, dy)$. Ofta används beteckningen $F = (P, Q)$, där då P och Q är reellvärda funktioner på D . Notationen blir då

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (16.3)$$

Det är endast den del av F som är i riktningen av γ som påverkar integralens värde. Ett sätt att se detta är att låta

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

vara enhetsvektorn i tangentens riktning och därmed är

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F \cdot dr &= \int_{\alpha}^{\beta} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F(r(t)) \cdot T(t)) |r'(t)| dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (F(r(t)) \cdot T(t)) ds,\end{aligned}$$

där ds är bågelementet.

Exempel 16.1. Om en partikel med massan m rör sig längs en kurva

$$\gamma = \{r(t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t \leq b\}$$

i ett kraftfält F gäller Newtons andra lag

$$F(r(t)) = mr''(t).$$

Arbetet som utförs ges av

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F \cdot dr &= \int_a^b m (r''(t) \cdot r'(t)) dt \\ &= m \int_a^b (r_1''(t)r_1'(t) + r_2''(t)r_2'(t)) dt \\ &= m \left[\frac{r_1'(t)^2}{2} + \frac{r_2'(t)^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{m}{2} \left[|r'(t)|^2 \right]_a^b \\ &= \frac{m|r'(b)|^2}{2} - \frac{m|r'(a)|^2}{2}\end{aligned}$$

vilket är skillnaden i partikelns kinetiska energi. ▲

Exempel 16.2. Beräkna

$$\int_{\gamma} y \ln \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y} dy$$

där γ är parabelbågen $y = x^2$ från punkten $(1, 1)$ till $(2, 4)$.

LÖSNING: Funktionen $r : [1, 2] \rightarrow \gamma$, med $r(t) = (t, t^2)$ är en parameterframställning till γ . Vi får att $r'(t) = (1, 2t)$ och därmed kan kurvintegralen beräknas enligt

$$\int_{\gamma} y \ln \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y} dy = \int_1^2 (t^2 \ln 1, -1/t)(1, 2t) dt = -2 \int_1^2 dt = -2$$

▲

Exempel 16.3. Låt

$$B(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

och C_R vara cirkeln kring origo med radie R orienterad moturs. Visa att

$$I = \int_{C_R} B(x, y) \cdot dr = 2\pi$$

för varje $R > 0$.

LÖSNING: Funktionen $r : [0, 2\pi] \rightarrow C_R$, med $r(t) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$ är en parameterframställning till C_R . Vi har att $r'(t) = (-R \sin \theta, R \cos \theta)$ och

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin \theta}{R}, \frac{\cos \theta}{R} \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

▲

16.2 Greens formel

Vi säger att randen till en mängd Ω är **positivt orienterad** om Ω finns på vänster sida då randen genomlöps.

Sats 16.4 (Greens formel). Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara kompakt där randen $\partial\Omega$ består av styckvis C^1 -kurvor som är positivt orienterade och låt $F = (P, Q)$ vara ett $C^1(\Omega)$. Då gäller att

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.4)$$

BEVIS: Vi bevisar satsen endast i fallet så det finns funktioner φ och ψ sådana att

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b \right\}$$

Vi har då att

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= - \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= - \int_a^b \left[P(x, y) \right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx \\ &= - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx + \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} P(x, y) dx \end{aligned}$$

och på liknande vis får vi

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \, dx dy = - \int_{\partial\Omega} Q(x, y) \, dy$$

som tillsammans visar satsen i detta specialfall. ■

Exempel 16.5. Låt

$$B(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Visa att

$$I = \int_{\partial D} B(x, y) \cdot dr = 0$$

för varje slutet område D som inte innehåller origo.

LÖSNING: Låt $B = (P, Q)$. I det inre av D gäller att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Enligt Greens formel är nu

$$I = \int_{\partial D} B(x, y) \cdot dr = \iint_D 0 \, dx dy = 0,$$

oberoende av orienteringen av randen. ▲

16.3 Area med Greens formel

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd. Enligt Greens formel får vi

$$\int_{\partial\Omega} -y \, dx = \iint_{\Omega} dx dy = \mu(\Omega)$$

och

$$\int_{\partial\Omega} x \, dy = \iint_{\Omega} dx dy = \mu(\Omega).$$

Vi kan kombinera ovanstående likheter till

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -y \, dx + x \, dy.$$

16.4 Flödesintegraler

Låt $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, där $D \subset \mathbb{R}^2$, vara ett kontinuerlig vektorfält. Låt $\gamma \subset D$ vara en orienterad C^1 -kurva. Då definieras **flödesintegralen** av $u = (u_1, u_2)$ över γ som

$$\int_{\gamma} u \cdot N \, ds, \tag{16.5}$$

där N är enhetsnormalen till γ i den riktning som uppfyller $N = RT$, där T är enhetstangenten till γ och

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notera att vi kan uttrycka en flödesintegral som en kurvintegral över ett modifierat vektorfält enligt

$$\int_{\gamma} u \cdot N \, ds = \int_{\gamma} u \cdot RT \, ds = \int_{\gamma} R^t u \cdot T \, ds = \int_{\gamma} -u_2 \, dx + u_1 \, dy.$$

En direkt följd av Greens formel är Gauss sats.

Sats 16.6 (Gauss sats). *Låt Ω vara en begränsad mängd i planet med C^1 -rand $\partial\Omega$. Om $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ är C^1 så gäller*

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot N \, ds = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \, dx dy$$

16.5 Övningar

Övning 16.1. [2022-03-18, uppgift 5, 63%]

Bestäm kurvintegralen

$$\int_{\gamma} u \cdot dr,$$

där $u(x, y) = (-xy, x^2 - y^2)$ och kurvan γ är den del av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ som ligger i första kvadranten orienterat moturs.

Övning 16.2. [2022-06-08, uppgift 8, 20%] Låt γ vara en C^1 -kurva av ändlig längd och $F = (P, Q)$ vara ett C^1 -fält. Visa att

$$\left| \int_{\gamma} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \right| \leq ML,$$

där L är längden av γ och

$$M = \max_{(x,y) \in \gamma} \sqrt{P(x, y)^2 + Q(x, y)^2}.$$

Övning 16.3. [2023-06-07, uppgift 7, 26%] Låt $F(x, y) = (x^2y + y^3 + x - 12y, 24x - y^2 - x^3 - 6xy^2)$. Maximera kurvintegralen

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

över alla enkla, slutna, kontinuerligt deriverbara kurvor γ som omsluter origo och genomlöps moturs. Bestäm kurvan γ och kurvintegralens maximala värde.

Övning 16.4. [2024-06-04, uppgift 3, 62%] Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (2xy - x^2) \, dx + (3x + y) \, dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till det begränsade område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$.

17 Potentialer

Definition 17.1. Låt $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, där D är en öppen delmängd av $\mathbb{R}^2$. En funktion $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ kallas en **potential** till F om

$$F = \nabla U. \quad (17.1)$$

Ett vektorfält F som har en potential kallas ett **potentialfält**.

Potentialer till ett vektorfält är inte unikt bestämda, men skiljer sig endast på en konstant. För att se detta låt U_1 och U_2 vara potentialer till F . Då gäller att

$$F = \nabla U_1 = \nabla U_2,$$

vilket ger att

$$\nabla(U_1 - U_2) = 0.$$

Enligt sats 4.3 så gäller att $U_1 = U_2 + C$, där $C \in \mathbb{R}$.

Exempel 17.2. Visa att kraftfältet

$$F(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

är konservativt i området $(x, y) \neq (0, 0)$. Bestäm också en potentialfunktion U .

LÖSNING: Vi söker en funktion U som uppfyller att $\nabla U = F$, vilket ger att

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

Från andra ekvationen får vi

$$U(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + c(x),$$

får någon funktion $c \in C^1$. Låt oss nu derivera med avseende på x , vilket ger

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + c'(x) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + c'(x).$$

Alltså måste $c'(x) = 0$ och därmed är en potential given av

$$U(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

▲

Sats 17.3. Låt $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, där $D \subset \mathbb{R}^2$, vara ett vektorfält med potential $U : D \rightarrow \mathbb{R}$. För varje kurva $\gamma \subset D$ så gäller att

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(b) - U(a), \quad (17.2)$$

där a och b är start och slutpunkten för γ . Speciellt är $\int_{\gamma} F \cdot dr$ oberoende av vägen.

BEVIS: Låt $r = r(t)$ vara en parameterframställning av γ med $r(\alpha) = a$ och $r(\beta) = b$, där $\alpha \leq t \leq \beta$. Från kedjeregeln har vi att

$$\frac{d}{dt}(U(r(t))) = (\nabla U)(r(t)) \cdot r'(t) = F(r(t)) \cdot r'(t),$$

vilket ger att

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\alpha}^{\beta} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(U(r(t))) dt = U(b) - U(a).$$

■

Sats 17.4. Låt F vara ett kontinuerligt vektorfält på en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω . Om

$$\int_{\gamma} F \cdot dr$$

är oberoende av vägen så har F en potential i Ω .

BEVIS: Vi behöver finna ett $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sådant att $\nabla U = F$. Låt $F = (P, Q)$ och definiera

$$U(x, y) = \int_{\gamma} P(s, t) ds + Q(s, t) dt,$$

där γ är någon kurva från (a, b) till (x, y) . Vi vill visa att $U'_x = P$ och $U'_y = Q$.

Eftersom kurvintegralen är oberoende av vägen så elimineras delen från (a, b) till (x, y) i uttrycket

$$\frac{1}{h} (U(x+h, y) - U(x, y)) = \frac{1}{h} \int_0^h P(x+s, y) ds \rightarrow P(x, y),$$

då $h \rightarrow 0$ från medelvärdessatsen för integraler. Alltså gäller att $U'_x = P$. På liknande vis får vi $U'_y = Q$ och vi är klara. ■

Sats 17.5. Om vektorfältet $F = (P, Q)$ har en potentialfunktion U av klass C^2 så gäller att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (17.3)$$

Notera att satsens förutsättningar är uppfyllda så gäller att

$$\int_{\partial D} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Definition 17.6. En mängd Ω är **enkelt sammanhängande** om den är bågvis sammanhängande och varje sluten kurva i Ω avgränsar ett område som är helt inneslutet i Ω .

Sats 17.7. Om vektorfältet $F = (P, Q)$ uppfyller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

och om $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande så har F en potential i Ω .

BEVIS: Enligt sats 17.4 så räcker det med att visa att integralen är oberoende av vägen. Antag att vi har två kurvor γ_1 och γ_2 från en punkt $p \in \Omega$ till en punkt $q \in \Omega$. Vi vill visa att

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr.$$

Kurvorna γ_1 och γ_2 utgör randen till en mängd D och vi får med rätt orientering enligt Greens formel

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

och vi är klara. ■

17.1 Övningar

Övning 17.1. [2024-03-14, uppgift 1, 84%]

a) Visa att fältet $F(x, y) = (\sin x + x \cos x + ye^y, x(y+1)e^y)$ är ett potentialfält.

b) Beräkna

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

där γ är den rätta linjen från punkten $(\pi/2, 0)$ till punkten $(\pi, 1)$.

Övning 17.2. [2023-03-17, uppgift 6] Låt γ vara den del av kurvan $x^2 + y^2 = 1$ som uppfyller att $y \geq 0$ och orienterad från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$. Bestäm värdet av

$$\int_{\gamma} (xy + \ln(x^2 + 1))dx + (4x + e^{y^2} + 3 \arctan y)dy.$$

Övning 17.3. [2023-06-07, uppgift 3, 35%] Beräkna

$$\int_{\gamma} \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right) dx + \frac{x}{x+y} dy,$$

där γ är den del av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ som går från $(0, 1)$ till $(2, 0)$ i första kvadranten.

18 Flödesintegraler i $\mathbb{R}^3$ och divergenssatsen

18.1 Flödesintegraler i $\mathbb{R}^3$

Låt $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, där $D \subset \mathbb{R}^2$, vara en parameterframställning för en yta Y . Vi kallar den sida dit normalvektor $N = r'_1 \times r'_2$ pekar för den **positiva sidan** av Y .

Exempel 18.1. En parameterframställning för sfären med radie R är $r(\theta, \varphi) = R(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$, där $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi$. Den positiva sidan blir då

$$r'_\theta \times r'_\varphi = R \sin \theta r(\theta, \varphi),$$

vilket är normalen som pekar ut från sfären. ▲

Låt $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, där $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ och låt $Y \subset \Omega$ vara en yta med parameterframställningen $r = r(s, t)$ där $(s, t) \in D$. Vi definierar flödesintegralen av ett vektorfält F över Y som

$$\iint_Y F \cdot N \, dS,$$

där N är den positiva enhetsnormalen och dS är ytelementet. Genom att använda parameterframställningen får vi att

$$\iint_Y F \cdot N \, dS = \iint_D F(r(s, t)) \cdot (r'_s \times r'_t) \, dsdt, \quad (18.1)$$

eftersom $dS = |r'_s \times r'_t| \, dsdt$ och

$$N = \frac{r'_s \times r'_t}{|r'_s \times r'_t|}.$$

Exempel 18.2. Beräkna flödet av vektorfältet

$$u = (x, y, z + 1)$$

upp (positiv z -koordinat) genom ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

LÖSNING: Vi vill beräkna

$$I = \iint_Y u \cdot N \, dS,$$

där $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$ och N är den uppåtriktade normalen till Y . Eftersom Y är en funktionsytan $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ över $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ så ges normalen

$$N = (-f'_x, -f'_y, 1) = (2x, 2y, 1).$$

Vi får att

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D u(x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx dy \\
 &= \iint_D (x, y, 2 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx dy \\
 &= \iint_D (2 + x^2 + y^2) \, dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r + r^3) \, dr d\theta \\
 &= 2\pi \left[r^2 + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= 5\pi/2
 \end{aligned}$$

▲

18.2 Divergenssatsen

Definition 18.3. Låt $u = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält av klass C^1 . Då definieras **divergensen** av u som funktionen

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (18.2)$$

Sats 18.4 (Divergence satsen). *Låt u vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subset \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1 -ytor som är orienterade med utåtriktad normal N så gäller att*

$$\iint_{\partial K} (u \cdot N) \, dS = \iiint_K \operatorname{div} u \, dx_1 dx_2 dx_3. \quad (18.3)$$

BEVIS: Vi visar endast satsen då vi har gjort restriktioner på mängden K . Vi antar att det finns funktioner φ och ψ och en mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ sådana att

$$K = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \psi(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in D \right\}$$

och visar att

$$\iint_{\partial K} ((0, 0, u_3) \cdot N) \, dS = \iiint_K \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Om vi kan göra samma sak för de andra två riktningarna så följer satsen.

Vi har att

$$\begin{aligned}
 \iiint_K \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \, dx &= \iint_D \left(\int_{\varphi(x_1, x_2)}^{\psi(x_1, x_2)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \, dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
 &= \iint_D (u_3(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) - u_3(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))) \, dx_1 dx_2 \\
 &= \iint_{\partial K} (0, 0, u_3) \cdot N \, dS,
 \end{aligned}$$

eftersom normalvektorn för en funktionsyta $x_3 = \psi(x_1, x_2)$ uppfyller

$$N dS = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, 1 \right) dx_1 dx_2$$

och att

$$\iint (0, 0, u_3) \cdot N dS = 0$$

för de delar av ∂K där normalvektorn är ortogonal mot $(0, 0, 1)$. ■

Exempel 18.5. Beräkna, genom att tillämpa Divergenssatsen, flödet av vektorfältet

$$u = (x, y, z + 1)$$

upp (positiv z -koordinat) genom ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

LÖSNING: Vi ger nu en alternativ lösning på exempel 18.2. Vi sluter till området genom att lägga till ytan $Y_2 = (x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1$. Låt Ω vara det område som innesluts av $Y_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$ och Y_2 .

Divergensen av u är

$$\operatorname{div} u = 1 + 1 + 1 = 3$$

och enligt Divergenssatsen så har vi att

$$\begin{aligned} \iint_{\partial \Omega} u \cdot N dS &= \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz \\ &= 3 \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 1-z} dx dy \right) dz \\ &= 3 \int_0^1 \pi(1-z) dz \\ &= 3\pi/2. \end{aligned}$$

Vi behöver även beräkna hur mycket flödet är ner genom Y_2 . Vi får

$$\iint_{Y_2} u \cdot N dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, y, 1) \cdot (0, 0, -1) dx dy = -\pi$$

vilket ger att flödet upp genom Y_1 är $3\pi/2 + \pi = 5\pi/2$. ▲

Definition 18.6. Ett vektorfält u som uppfyller att $\operatorname{div} u = 0$ kallas **källfritt**.

18.3 Övningar

Övning 18.1. [2022-03-18, uppgift 7, 55%] Beräkna flödet av vektorfältet $u(x, y, z) = (x + e^y, 1, 2z + \sin x)$ ut genom det begränsade området

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+2y^2} \leq z \leq e \right\}.$$

Övning 18.2. [2022-06-08, uppgift 7, 45%] Beräkna flödet av vektorfältet $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 2x_1^2)$ upp genom paraboloiden $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$, där $x_3 \geq 0$.

Övning 18.3. [2023-03-17, uppgift 7, 56%] Beräkna flödet av vektorfältet $u(x, y, z) = (e^{yz}, 2xy - e^z, x^2 - z^2)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, där $z \geq 0$.

Övning 18.4. [2024-06-04, uppgift 6, 27%] Låt $F(x, y, z) = (4x - x^3 + 1, 4y - y^3, 4z - z^3 - 3x)$. Bestäm den slutna och begränsade yta som maximerar flödesintegralen

$$\iint_{\Omega} F \cdot N \, dS.$$

Bestäm även flödet.

19 Stokes sats

Definition 19.1. Låt $u = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1 -fält. Vi definierar **rotationen** av u som vektorfältet

$$\operatorname{rot} u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (19.1)$$

Fältet u kallas **virvelfritt** om $\operatorname{rot} u = 0$.

Vi kan symboliskt använda determinantregler enligt följande

$$\operatorname{rot} u = \nabla \times u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Sats 19.2 (Stokes sats). Låt $u = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Om Y är en orienterad yta med enhetsnormal N och en orienterad rand ∂Y med tangentvektor T så gäller att

$$\int_{\partial Y} u \cdot dr = \iint_Y (\operatorname{rot} u) \cdot N \, dS, \quad (19.2)$$

där $N \times T$ pekar in mot Y .

Notera att om Y är en plan yta i xy -planet och $u = (u_1, u_2, 0)$ så blir Stokes sats precis Greens formel, ty

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} u_1 \, dx + u_2 \, dy &= \iint_Y \left(-\frac{\partial u_2}{\partial z}, -\frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) \, dxdy \\ &= \iint_Y \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \, dxdy \end{aligned}$$

BEVIS: Vi kan bevisa satsen i fallet att ytan ges av en funktionsyta $z = f(x, y)$, med $(x, y) \in D$ och $f \in C^2$.

Låt $r(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ vara en parametrisering av randen ∂Y för $\alpha \leq t \leq \beta$, då gäller att

$$r'(t) = (x'(t), y'(t), f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t))$$

och vi får

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} u \cdot dr &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(u_1 x' + u_2 y' + u_3 (f'_x(x, y)x' + f'_y(x, y)y') \right) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left((u_1 + u_3 f'_x(x, y))x' + (u_2 + u_3 f'_y(x, y))y' \right) dt \\ &= \int_{\partial D} \left(u_1 + u_3 f'_x(x, y), u_2 + u_3 f'_y(x, y) \right) \cdot dr, \end{aligned}$$

eftersom $t \mapsto (x(t), y(t))$ är en parametrisering av randen ∂D .

Först noterar vi att $u_j(x, y, z) = u_j(x, y, f(x, y))$ så att derivation av u_j med avseende på x och y involverar kedjeregeln. Med det i åtanke kan vi nu använda Greens formel och får

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} u \cdot dr &= \iint_D \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} f'_x + \frac{\partial u_3}{\partial x} f'_y + \frac{\partial u_3}{\partial z} f'_x f'_y + u_3 f''_{yx} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial z} f'_y - \frac{\partial u_3}{\partial y} f'_x - \frac{\partial u_3}{\partial z} f'_x f'_y - u_3 f''_{yx} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(-f'_x \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) - f'_y \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (\text{rot } u) \cdot (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy \\ &= \iint_Y (\text{rot } u) \cdot N dS \end{aligned}$$

Vi är klara. ■

19.1 Övningar

Övning 19.1. [2024-03-14, uppgift 6, 47%]

Beräkna

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

där $F(x, y, z) = (x^2 y, x^3/3, xy)$ och γ är skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och ytan $z = y^2 - x^2$ orienterad moturs sedd ovanifrån (från högre z -värden).

20 Teorifrågor

- T1 Vad menas med att en mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ är öppen?
- T2 Vad menas med att en mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ är sluten?
- T3 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Vad menas med att $f(x) \rightarrow A$, då $x \rightarrow a$?
- T4 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Vad menas med att f är kontinuerlig i punkten a ?
- T5 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Vad menas med att $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är partiellt deriverbar med avseende på x_j ?
- T6 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Vad menas med att f är differentierbar i punkten a ?
- T7 Visa att om f är differentierbar i a så är f kontinuerlig i a .
- T8 Visa att om f är partiellt deriverbar i a så behöver f nödvändigtvis inte vara kontinuerlig i a .
- T9 Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där D är en öppen delmängd av $\mathbb{R}^n$. Vad menas med att $f \in C^j(D)$?
- T10 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $v \in \mathbb{R}^n$ en enhetsvektor. Vad menas med att f är deriverbar med avseende på riktningen v .
- T11 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $v \in \mathbb{R}^n$ en enhetsvektor. Visa att $f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v$.
- T12 Visa att $(\nabla f)(a)$ pekar i den riktning i vilken f växer snabbast.
- T13 Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $r = r(t)$ vara en parametrisering av en nivåkurvan $\gamma = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Visa att $(\nabla f)(a, b)$ är ortogonal mot $r'(t)$, där $r(t) = (a, b)$.
- T14 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Vad menas med att f har en lokal maxpunkt i a ?
- T15 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Visa att om f har ett lokalt extremvärde i en punkt a och f är partiellt deriverbar i a så gäller att $(\nabla f)(a) = 0$.
- T16 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Vad menas med funktionalmatrisen för f ?
- T17 Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vad menas med funktionaldeterminanten för f ?
- T18 Låt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vara en icke-negativ funktion och Ω en öppen delmängd av $\mathbb{R}^n$. Vad menas med att integralen

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$$

är konvergent.

T19 Visa att integralen

$$\iint_{|x|>1} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^a}$$

är konvergent om och endast om $a > 2$.

T20 Låt Y vara en yta i $\mathbb{R}^3$. Visa att integralen

$$\iint_Y dS$$

är oberoende av parameterframställning.

T21 Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Visa att kurvintegralen

$$\int_{\gamma} F \cdot dr$$

är oberoende av parameterframställning.

T22 Vad menas med att U är en potential till vektorfältet $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$?

T23 Låt U vara en potential till vektorfältet $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och låt γ vara en kurva i $\mathbb{R}^2$. Visa att

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(b) - U(a),$$

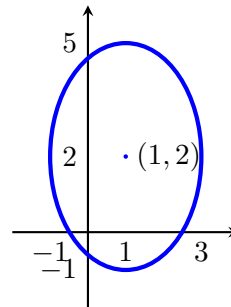
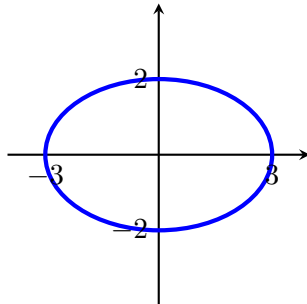
där a och b är start- och slutpunkt för γ .

21 Svar till övningar

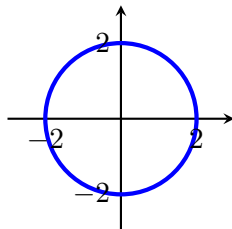
1 Vektorer och mängder i $\mathbb{R}^n$

1.1.

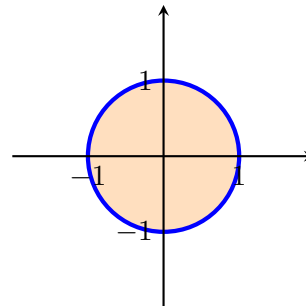
a)



b)



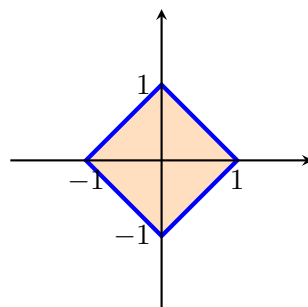
d)



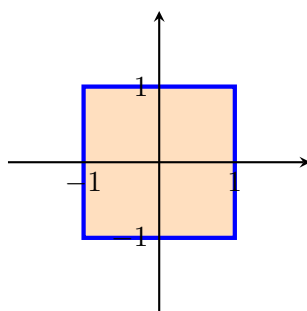
c)

1.2.

- a) Mängden är sluten, begränsad och kompakt.
Randen är cirkeln $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
Inre punkterna är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.



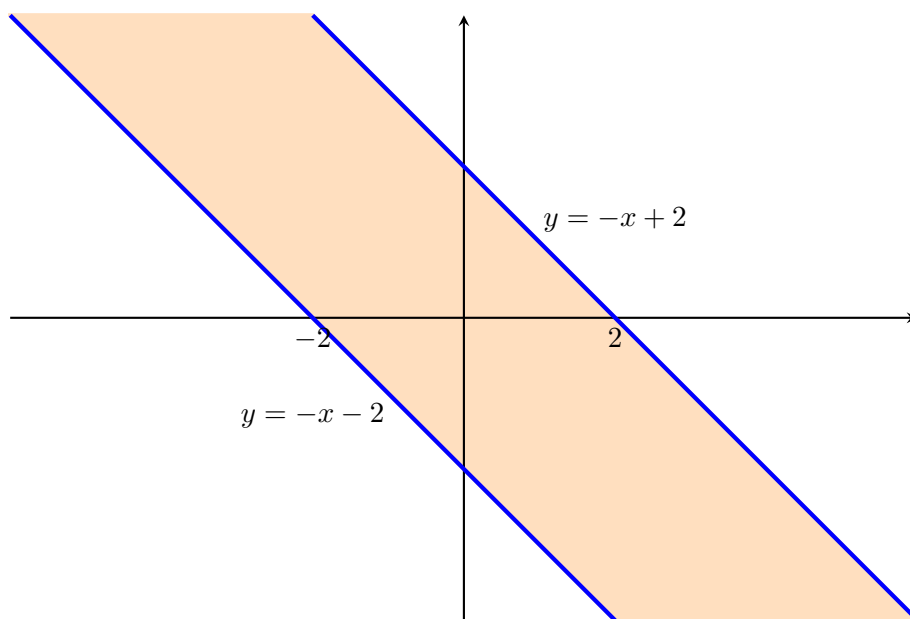
- b) Mängden är öppen och begränsad.
Randen är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$.
Inre punkterna är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.



c) Mängden är sluten och begränsad och därmed kompakt.

Randen är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \max(|x|, |y|) = 1\}$.

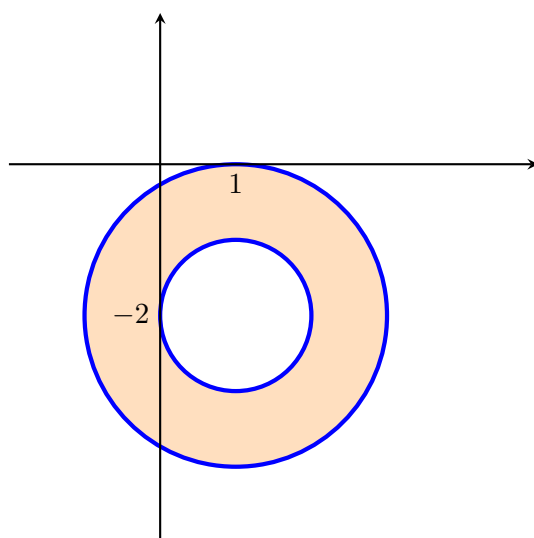
Inre punkterna är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \max(|x|, |y|) < 1\}$.



d) Mängden är sluten och obegränsad och därmed ej kompakt.

Randen består av linjerna $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = -x + 2 \text{ eller } y = -x - 2\}$.

Inre punkterna är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x + y| < 2\}$.

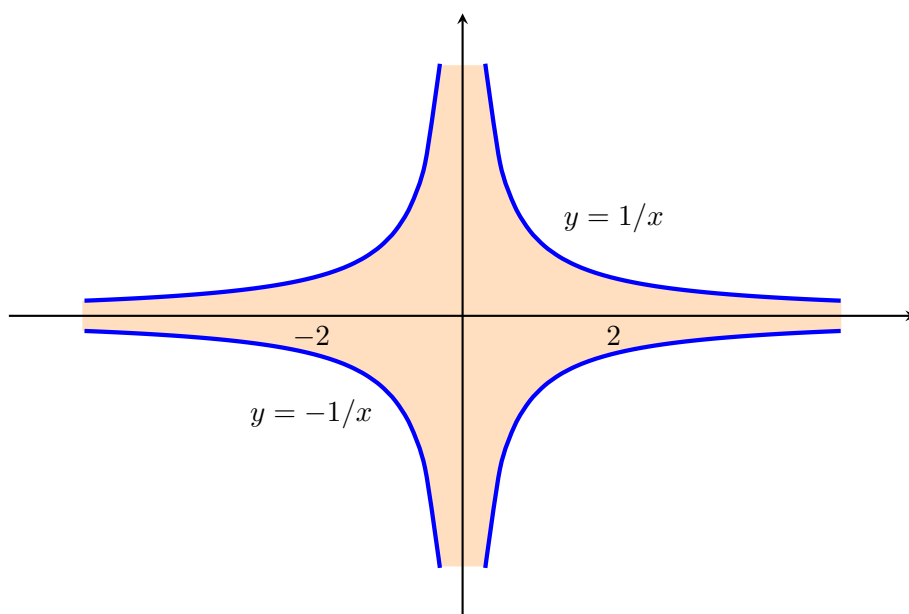


e) (Tips: Använd kvadratkomplettering)

Mängden är varken öppen eller sluten, den är begränsad och inte kompakt.

Randen består av cirkelarna $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ och $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

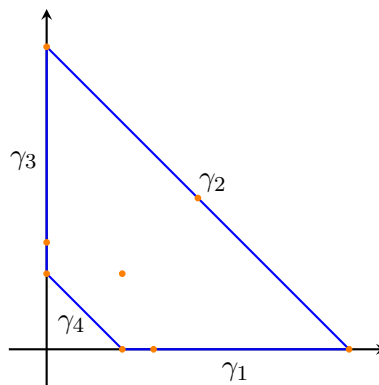
Inre punkter är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x-1)^2 + (y+2)^2 < 4\}$.



f) Mängden är öppen, obegränsad och därmed ej kompakt.

Randen består av linjerna $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| = 1\}$.

Inre punkterna är mängden själv eftersom den är öppen.



2 Gränsvärden och kontinuitet

2.2. Lösning:

a) Från standardgränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+|x|^2)}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+|x|^2)}{|x|^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2}} = 1,$$

då $x \rightarrow 0$, eftersom

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{|x|^2} = 0$$

b) Låt $x = y = t$, då får vi att för $t \neq 0$,

$$\frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4} = \frac{t^4}{3t^4} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3},$$

då $t \rightarrow 0$. Men om $x = s$ och $y = 0$, så följer att för $s \neq 0$,

$$\frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4} = 0 \rightarrow 0,$$

då $s \rightarrow 0$. Alltså existerar inte gränsvärdet.

3 Partiella derivator, differentierbarhet och klassen C^1

3.1. För att visa att $f(x, y) = x^2 y$ är differentierbar i punkten $(1, 1)$ bildar vi

$$\begin{aligned} f(1+h_1, 1+h_2) - f(1, 1) &= (1+h_1)^2(1+h_2) - 1 \\ &= 2h_1 + h_1^2 + h_2 + 2h_1 h_2 + h_1^2 h_2 \\ &= 2h_1 + h_2 + |h| \frac{h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_1^2 h_2}{|h|} \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} |\rho(h)| &= \left| \frac{h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2}{|h|} \right| \\ &\leq \left| r \cos^2 \theta + 2r \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \right| \\ &\leq r |3 + r| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

då $r \rightarrow 0$.

3.2. Lösning: Ytan är en nivåyta till funktionen $F(x, y, z) = xy + yz + xz$ och därmed ges en normalvektor av tangentplanet i (x, y, z) av $N(x, y, z) = (\nabla F)(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. Vi får att $N(x, y, z) = k(1, 2, 1)$ för något k . Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} y + z = k \\ x + z = 2k \\ x + y = k \\ xy + yz + xz = 1 \end{cases}$$

Ekvation (2) - (1) ger att $x - y = k$ som tillsammans med ekvation (3) ger att $x = k$, $y = 0$ och $z = k$. Ekvation (4) ger nu att $k^2 = 1$ vilket leder till punkterna $\pm(1, 0, 1)$.

För $(1, 0, 1)$ får vi planet $(1, 2, 1) \cdot (x-1, y, z-1) = 0$ vilket är $x-1+2y+z-1=0$ eller $x+2y+z-2=0$.

För $-(1, 0, 1)$ får vi planet $-(1, 2, 1) \cdot (x+1, y, z+1) = 0$ vilket är $-x-1-2y-z-1=0$ eller $x+2y+z+2=0$.

4 Kedjeregeln och partiella differentialekvationer

4.1. Lösning:

Enligt kedjeregeln får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial s} + 2x \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 2y \frac{\partial f}{\partial s} - 2y \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \left(2x \frac{\partial f}{\partial s} + 2x \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{y} \left(2y \frac{\partial f}{\partial s} - 2y \frac{\partial f}{\partial t} \right) = 4 \frac{\partial f}{\partial t} = 1.$$

Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4}$$

och

$$f = \frac{t}{4} + g(s) = \frac{x^2 - y^2}{4} + g(x^2 + y^2),$$

för någon C^1 -funktion g . Randvillkoret $f(u, u) = 2u^2$ ger att $g(s) = s$ och

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{4} + x^2 + y^2.$$

4.2. Lösning: Låt $f(x, y) = g(u, v)$. Vi får att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Vi försätter för att få uttrycken för andraderivatorna:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Tillsammans blir det

$$(1 + \alpha - 6\alpha^2)g''_{uu} + (1 + \beta - 6\beta^2)g''_{vv} + 2(1 + \alpha + \beta - 6\alpha\beta)g''_{uv} = 1.$$

Ekvationen

$$1 + \alpha - 6\alpha^2 = 0$$

har lösningarna $\alpha_1 = 1/2$ och $\alpha_2 = -1/3$. Om vi låter $\alpha = 1/2$ och $\beta = -1/3$ så får vi

$$g''_{uv} = 6/25.$$

Alltså är

$$g(u, v) = \frac{6uv}{25} + C_1(u) + C_2(v),$$

där $C_1, C_2 \in C^2$.

Uttryckt i x och y får vi

$$f(x, y) = \frac{6(x + y/2)(x - y/3)}{25} + C_1(x + y/2) + C_2(x - y/3).$$

4.3. Lösning: Låt g vara den funktion som uppfyller $f(x, y) = g(u, v) = g(u(x, y), v(x, y))$. Enligt kedjeregeln

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2(x - y) \frac{\partial g}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2(x + y) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}. \end{cases}$$

Alltså har vi

$$\begin{aligned}(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x+y)(x-y)\frac{\partial g}{\partial u} - 2(x-y)(x+y)\frac{\partial g}{\partial u} + (x-y)\frac{\partial g}{\partial v} \\ &= (x-y)\frac{\partial g}{\partial v} = 0,\end{aligned}$$

och därmed är $g(u, v) = h(u)$, för någon funktion h . Låt oss återföra problemet till ursprungsvariablerna

$$f(x, y) = g(u, v) = h(u) = h(x^2 - y^2 - 2xy).$$

Begynnelsevillkoret ger att $f(x, 0) = h(x^2) = e^{x^2}$. Alltså ges lösningen av

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2 - 2xy}.$$

4.4. Lösning: Låt $u(x, y) = f(T(x, y))$, där $(s, t) = T(x, y)$ är avbildningen som beskrivs i uppgiften. Vi få då

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x} \left(-\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

och

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \left(-\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

På liknande vis får vi

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

och

$$-2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Alltså får vi tillsammans

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial f}{\partial t} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}.$$

4.5. Lösning:

a) Låt $f(s, t) = u(x, y)$, vi får

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Användning av produktregeln ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = -\frac{1}{4(x-y)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{4(x-y)} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ &= -\frac{1}{4t^3} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{4t^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

b) Låt oss även transformera det andra uttrycket i ekvationen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{4(x-y)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4t^3} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2t} \left(\frac{1}{2s} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} - \frac{1}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

Ekvationen blir nu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = 4st$$

c) Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2s^2t + g_1(t),$$

där g_1 är en godtycklig deriverbar funktion. Primitiv funktion i t blir nu

$$f(s, t) = s^2t^2 + g_2(t) + g_3(s),$$

där g_2 och g_3 är deriverbara funktioner. Alltså blir

$$u(x, y) = y(x - y) + g_2(\sqrt{x - y}) + g_3(\sqrt{y}).$$

4.6. Lösning: Vi börjar med att beräkna $u'_x = f'(y/x)(-y/x^2)$ och $u'_y = f'(y/x)/x$. Därmed är

$$u''_{xx} = f''\left(\frac{y}{x}\right) \frac{y^2}{x^4} + f'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{2y}{x^3}$$

och

$$u''_{yy} = f''\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x^2}.$$

Alltså gäller att

$$0 = x^2(u''_{xx} + u''_{yy}) = f''(t)(1 + t^2) + f'(t)2t,$$

där $t = y/x$.

Nu kan vi utnyttja att $f''(t)(1 + t^2) + f'(t)2t = 0$ är detsamma som

$$\frac{d}{dt} (f'(t)(1 + t^2)) = 0$$

vilket ger att $f'(t) = D/(1 + t^2)$, för någon konstant D och

$$f(t) = D \arctan t + E.$$

Alltså är $u(x, y) = D \arctan \frac{y}{x} + E$, där $D, E \in \mathbb{R}$.

5 Riktningderivata och Gradient

5.1. Lösning:

a) Gradienten ges av

$$(\nabla f)(x, y, z) = (y, x + ze^{yz}, ye^{yz} + 1)$$

och speciellt

$$(\nabla f)(3, 1, 0) = (1, 3, 2).$$

Derivatan i riktningen av $v = (a, b, c)$ är

$$f'_v(3, 1, 0) = (\nabla f)(3, 1, 0) \cdot (a, b, c) = (1, 3, 2) \cdot (a, b, c) = a + 3b + 2c.$$

b) Riktningderivatan är maximerad i gradientens riktning, alltså då

$$v = \frac{(1, 3, 2)}{\sqrt{1 + 3^2 + 2^2}} = \frac{(1, 3, 2)}{\sqrt{14}}.$$

5.2. Lösning: Bilda $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Ellipsoiden är då nivåytan $F(x, y, z) = 0$. Gradienten ∇F pekar alltså ortogonalt mot tangentplanet till F i varje punkt (x, y, z) som uppfyller $F(x, y, z) = 0$. Speciellt gäller att det minsta avståndet från ellipsoiden till planet måste gå i riktningen som är gradienten ∇F och planets normal $(1, 1, 1)$. Alltså gäller att

$$\nabla F = \lambda(1, 1, 1),$$

vilket är detsamma som

$$8x = \lambda, \quad 2y = \lambda, \quad 2z = \lambda.$$

Alltså är $4x = y = z$, som insatt i ellipsoiden blir

$$4x^2 + (4x)^2 + (4x)^2 = 4$$

eller

$$9x^2 = 1.$$

Alltså är $(x, y, z) = \pm(1/3, 4/3, 4/3)$. Dessa punkter är kandidater till att ha minsta avståndet till det givna planet.

Vi börjar med $(1/3, 4/3, 4/3)$. Genom att börja i denna punkt och lägga till a mycket av vektorn $(1, 1, 1)$ så vill vi hamna i planet. Vi får

$$(1/3, 4/3, 4/3) + a(1, 1, 1) = (a + 1/3, a + 4/3, a + 4/3)$$

som ligger i planet om

$$3a + 3 = 6,$$

d.v.s. om $a = 1$. Avståndet är alltså längden av vektorn $|(1, 1, 1)| = \sqrt{3}$.

Nu till den andra punkten, $-(1/3, 4/3, 4/3)$. Vi får

$$(-1/3, -4/3, -4/3) + a(1, 1, 1) = (a - 1/3, a - 4/3, a - 4/3)$$

som ligger i planet om

$$3a - 3 = 6,$$

d.v.s. om $a = 3$. Avståndet är alltså längden av vektorn $|3(1, 1, 1)| = 3\sqrt{3}$.

Kortaste avståndet är därmed $\sqrt{3}$.

5.3. Lösning:

a) Vi får att

$$(\nabla f)(x, y, z) = (2x, z, y).$$

En enhetsvektor i från $(1, 1, 1)$ mot $(3, 3, 2)$ ges av $v = 1/3 \cdot (2, 2, 1)$.

Alltså är

$$f'_v(1, 1, 1) = (\nabla f)(1, 1, 1) \cdot v = (2, 1, 1) \cdot v = 7/3.$$

b) Funktionen f växer snabbast i gradientens riktning. Alltså i riktningen $(\nabla f)(1, 1, 1) = (2, 1, 1)$. Vi har att tillväxten i denna riktning är

$$f'_u(1, 1, 1) = |(\nabla f)(1, 1, 1)| = |(2, 1, 1)| = \sqrt{6},$$

där $u = 1/\sqrt{6} \cdot (2, 1, 1)$.

5.4. Lösning: En tangentvektor för denna ellips måste vara ortogonal mot både planet och ellipsoiden. Planet har överallt normalvektorn $n_1 = (1, -1, 2)$ och ellipsoiden har i den angivna punkten normalvektorn $n_2 = (4, 2, 2)$. Tangentvektorn för ellipsen i punkten $(1, 1, 1)$ blir därför $n_1 \times n_2 = (6, -6, -6)$. Vi kan exempelvis svara med tangentvektorn $(1, -1, -1)$.

6 Taylors formel och lokala extrempunkter

6.1. Lösning:

Vi söker stationära punkter:

$$f'_x(x, y) = 2x - \frac{3y}{1 + xy} = \frac{2x + 2x^2y - 3y}{1 + xy} = 0$$

och

$$f'_y(x, y) = 2y - \frac{3x}{1 + xy} = \frac{2y + 2xy^2 - 3x}{1 + xy} = 0.$$

Alltså har vi $x^2 - y^2 = 0$ eller $x = y$. Insatt i första ekvationen ger

$$2x + 2x^3 - 3x = x(2x^2 - 1) = 0$$

vilket betyder $(x, y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ som enda stationära punkt. För att veta om detta är en extrempunkt så bestämmer vi den kvadratiska delen av Taylors formel i den stationära punkten.

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{(2 + 4xy)(1 + xy) - (2x + 2x^2y - 3y)y}{(1 + xy)^2} = \frac{2 + 4xy + 2x^2y^2 + 3y^2}{(1 + xy)^2} \\ f''_{yy} &= \frac{(2 + 2x)(1 + xy) - (2y + 2xy - 3x)x}{(1 + xy)^2} = \frac{2 + 4xy + 2x^2y^2 + 3x^2}{(1 + xy)^2} \\ f''_{xy} &= \frac{(2x^2 - 3)(1 + xy) - (2x + 2x^2y - 3y)x}{(1 + xy)^2} = -\frac{3}{(1 + xy)^2} \end{aligned}$$

Ovanstående resultat är i linje med att f är symmetrisk i x och y .

Den kvadratiska formen i $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ges då av

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= \frac{1}{2} \left(f''_{xx}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})h^2 + 2f''_{xy}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})hk + f''_{yy}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}h^2 - \frac{8}{3}hk + \frac{8}{3}k^2 \right) \\ &= \frac{4}{3}(h^2 - hk + k^2) = \frac{4}{3} \left((h - k/2)^2 + 3k^2/4 \right) > 0, \end{aligned}$$

då $(h, k) \neq (0, 0)$. Eftersom kvadratiska formen är positivt definit har f ett lokalt minimum i $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, vilket är den enda lokala extrempunkten som finns.

9 Implicita funktionssatsen och optimering på kompakta mängder

9.1. Lösning: Bilda $F(x, y) = \sin(xy) - \ln(x + y)$.

Först konstaterar vi att $F(0, 1) = 0$, vilket säger att $(0, 1)$ ligger på ytan.

Vi ser att

$$F'_y(x, y) = x \cos(xy) - \frac{1}{x + y},$$

och därmed att $F'_y(0, 1) = -1 \neq 0$. Alltså kan vi lösa ut $y = y(x)$ i en omgivning till punkten $(0, 1)$.

Eftersom $F(x, y(x)) = 0$ så gäller att

$$\frac{d}{dx} (F(x, y(x))) = F'_1(x, y(x)) + F'_2(x, y(x))y'(x) = 0$$

och därmed

$$y'(x) = -\frac{F'_1(x, y(x))}{F'_2(x, y(x))}.$$

Vi har att $F'_1(x, y) = y \cos(xy) - \frac{1}{x+y}$ och $F'_2(x, y) = x \cos(xy) - \frac{1}{x+y}$.

Alltså

$$y'(x) = -\frac{(x + y)y \cos(xy) - 1}{(x + y)x \cos(xy) - 1},$$

och därmed

$$y'(0) = 0.$$

9.2. Lösning: Först kan vi konstatera att

$$\left| \frac{4y+3}{1+x^2+y^2} \right| = \left| \frac{4r \sin \theta + 3}{1+r^2} \right| \leq \left| \frac{4r+3}{1+r^2} \right| \rightarrow 0,$$

då $(x, y) \rightarrow \infty$. Alltså kan vi för varje $\varepsilon > 0$ finna ett R sådant att $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ för att (x, y) som uppfyller att $x^2 + y^2 \geq R$.

Vi ser att f är deriverbar överallt och kan därför endast anta största och minsta värde i en inre punkt om punkten är en stationär punkt. Vi söker dessa:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -\frac{2x(4y+3)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f'_y(x, y) = \frac{4(1+x^2+y^2)-2y(4y+3)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

vilket är detsamma som

$$\begin{cases} x(4y+3) = 0 \\ 2+2x^2-2y^2-3y = 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger två fall, antingen är $x = 0$ eller $y = -3/4$.

Fallet då $x = 0$. Andra ekvationen ger att $2 - 2y^2 - 3y = 0$, vilket har lösningarna $y = 1/2$ och $y = -2$. Vi får punkterna $(0, 1/2)$ och $(0, -2)$ som ger kandidaterna $f(0, 1/2) = 4$ och $f(0, -2) = -1$.

Fallet då $y = -3/4$. Andra ekvationen blir då $x^2 + 25/16 = 0$ vilket är orimligt.

Alltså är 4 och -1 det största respektive minsta värdet för f .

9.3. Lösning: Bilda funktionen $F(x, y) = x^6 + y^6 + x^2 + y$. Eftersom $F'_y(x, y) = 6y^5 + 1$ och $F'_y(0, 0) = 1 \neq 0$ så finns det en unik funktion $y = f(x)$ sådan att $F(x, f(x)) = 0$ i en omgivning av $(0, 0)$. Via implicit derivering av

$$0 = F(x, f(x)) = x^6 + f(x)^6 + x^2 + f(x)$$

får vi

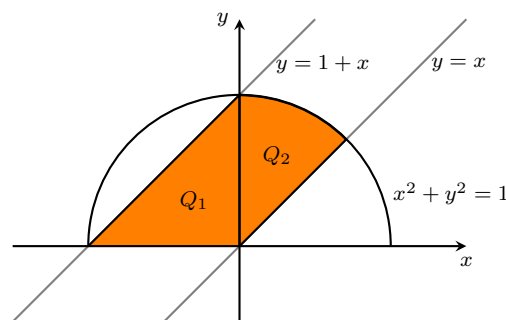
$$6x^5 + 6f(x)^5 f'(x) + 2x + f'(x) = 0$$

och eftersom $f(0) = 0$ så blir $f'(0) = 0$. Ytterligare implicit derivering ger

$$30x^4 + 30f(x)^4 f'(x)^2 + 6f(x)^5 f''(x) + 2 + f''(x) = 0$$

och $f''(0) = -2$. Detta visar att $x = 0$ är en stationär punkt och en lokal maxpunkt till f .

9.4. Lösning: En skiss på området är följande, där de orange punkterna kommer från senare uträkningar:



Vi börjar med att studera stationära punkter i vårt område. Vi får

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - \frac{4}{x+y} = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y - \frac{4}{x+y} = 0 \end{cases}$$

vilket visar att $x = y$ och att $2x - 2/x = 0$. Detta ger oss $x = y = 1$ eftersom $x = -1$ är utanför vårt område. En kandidat är alltså $f(1, 1) = 2 - 4 \ln 2$.

Låt oss kolla hörnen. Vi får kandidaterna $f(1, 0) = f(0, 1) = 1$ och $f(0, 4) = f(4, 0) = 16 - 4 \ln 4 = 16 - 8 \ln 2$.

Det återstår att kolla funktionens värde på randen.

Vi börjar med γ_1 , där en parametrisering ges av $(x(t), y(t)) = (t, 0)$, där $1 \leq t \leq 4$. Låt $\varphi_1(t) = f(t, 0) = t^2 - 4 \ln t$. Vi får $\varphi'_1(t) = 2t - 4/t = 0$ om och endast om $t = \sqrt{2}$. Vi får kandidaten $f(\sqrt{2}, 0) = 2 - 4 \ln \sqrt{2} = 2 - 2 \ln 2$.

Vi inser att symmetri ger att analysen över γ_3 är analog med γ_1 och vi får $f(0, \sqrt{2}) = 2 - 2 \ln 2$ som kandidat.

Studera nu γ_2 . En parametrisering ges av $(x(t), y(t)) = (t, 4 - t)$, där $0 \leq t \leq 4$. Definiera $\varphi_2(t) = f(t, 4 - t) = t^2 + (4 - t)^2 - 4 \ln 4$. Vi får $\varphi'_2(t) = 2t - 2(4 - t) = 4t - 8 = 0$ om och endast om $t = 2$. Vi har fått kandidaten $f(2, 2) = 2^2 + 2^2 - 4 \ln 4 = 8 - 8 \ln 2$.

Slutligen följer analysen längs γ_4 . En parametrisering ges av $(x(t), y(t)) = (t, 1 - t)$, där $0 \leq t \leq 1$. Definiera $\varphi_4(t) = f(t, 1 - t) = t^2 + (1 - t)^2$. Vi får $\varphi'_4(t) = 2t - 2(1 - t) = 4t - 2 = 0$ om och endast om $t = 1/2$. Vi har fått kandidaten $f(1/2, 1/2) = 1/2$.

Av kandidaterna är det största värdet $16 - 8 \ln 2$ och det minsta är $2 - 4 \ln 2$.

9.5. Lösning:

- a) Bilda $F(x, y, z) = \ln z + x + 2 - xy - 2z$. Ytan Y ges då av nivåytan $F(x, y, z) = 0$. Enligt Implicita funktionssatsen finns detta f då $F'_z(0, 0, 1) \neq 0$. Vi har att

$$F'_z(x, y, z) = \frac{1}{z} - 2$$

och därmed är $F'_z(0, 0, 1) = -1 \neq 0$. Vi har visat existensen av f .

b) Vi börjar med att notera att $f(0,0) = 1$.

Genom att nyttja implicit derivation av uttrycket

$$\ln f(x, y) + x + 2 - xy - 2f(x, y) = 0$$

med avseende på x får vi

$$\frac{f'_x(x, y)}{f(x, y)} + 1 - y - 2f'_x(x, y) = 0$$

och

$$f'_x(0, 0) = 1.$$

Låt oss nu bestämma $f'_y(0, 0)$. Vi har

$$\frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} - x - 2f'_y(x, y) = 0$$

vilket ger

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Vi bestämmer nu $f''_{xx}(0, 0)$. Vi får

$$\frac{f''_{xx}(x, y)f(x, y) - f'_x(x, y)^2}{f(x, y)^2} - 2f''_{xx}(x, y) = 0$$

och med $f(0, 0) = 1$, $f'_x(0, 0) = 1$ får vi $f''_{xx}(0, 0) = -1$.

På liknande vis får vi

$$\frac{f''_{xy}(x, y)f(x, y) - f'_x(x, y)f'_y(x, y)}{f(x, y)^2} - 1 - 2f''_{xy}(x, y) = 0$$

och

$$f''_{xy}(0, 0) - 1 - 2f''_{xy}(0, 0) = 0$$

vilket ger $f''_{xy}(0, 0) = -1$.

Slutligen

$$\frac{f''_{yy}(x, y)f(x, y) - f'_y(x, y)^2}{f(x, y)^2} - 2f''_{yy}(x, y) = 0$$

vilket blir

$$f''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Därmed blir Taylorpolynomet av grad 2

$$p_2(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}(-x^2 - 2xy).$$

10 Optimering med bivillkor

10.1. Lösning: Bilda $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ och $G(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$. Vi söker alltså minsta värdet av f under bivillkoret $G(x) = 1$.

Vi kan omformulera problemet till att söka efter x sådana att

$$(\nabla f)(x) = \lambda(\nabla G)(x),$$

för något λ . Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 = \lambda \\ 2x_2 = -\lambda \\ 2x_3 = 2\lambda \\ 2x_4 = -\lambda \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Alltså är $x_2 = -x_1$, $x_3 = 2x_1$ och $x_4 = -x_1$ och

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = x_1 + x_1 + 4x_1 + x_1 = 7x_1 = 1.$$

Alltså gäller att

$$\begin{cases} x_1 = 1/7 \\ x_2 = -1/7 \\ x_3 = 2/7 \\ x_4 = -1/7 \end{cases}$$

och därmed är en kandidat $f(1/7, -1/7, 2/7, -1/7) = 7/7^2 = 1/7$.

Eftersom f kan anta godtyckligt stora värden, exempelvis längs linjen $x = (1+t, t, 0, 0)$, då $t \rightarrow \infty$ och är icke-negativ, så är vår kandidat ett minsta värde.

10.2. Lösning: Låt oss använda oss av Lagranges multiplikatormetod. Låt $f(x, y, z) = xy\sqrt{z}$ och $g(x, y, z) = x + y + z$. Vi söker lösningar till

$$\begin{cases} (\nabla f)(x, y, z) = \lambda(\nabla g)(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases}$$

vilket är detsamma som

$$\begin{cases} y\sqrt{z} = \lambda \\ x\sqrt{z} = \lambda \\ xy/2\sqrt{z} = \lambda \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Vi ser från de två översta ekvationerna att

$$x = y = \lambda/\sqrt{z}$$

och insatt i övriga ekvationer får vi

$$\begin{cases} \lambda = 2z^{3/2} \\ z = 1 - 2\lambda/\sqrt{z}. \end{cases}$$

Vi har att

$$z = 1 - 4z$$

och därmed är $z = 1/5$ och $x = y = (1 - z)/2 = 2/5$.

Därmed är det största värdet $f(2/5, 2/5, 1/5) = 4\sqrt{5}/125$. Att detta värde är ett maximum följer av att $f(x, y, z) = 0$ på randen.

10.3. Lösning: Vi vill optimera $f(x, y, z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ under bivillkoret $g(x, y, z) = x + y + z = \pi$, där x, y, z alla är icke-negativa. Observera att $f(x, y, z) = 0$ på randen av bivillkorsytan.

Låt oss nu undersöka inre punkter. En extrempunkt måste nu uppfylla

$$(\nabla f)(x, y, z) = \lambda(\nabla g)(x, y, z)$$

tillsammans med att $g(x, y, z) = \pi$. Detta ger att

$$\begin{cases} \cos x \sin y \sin z = \lambda \\ \sin x \cos y \sin z = \lambda \\ \sin x \sin y \cos z = \lambda \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

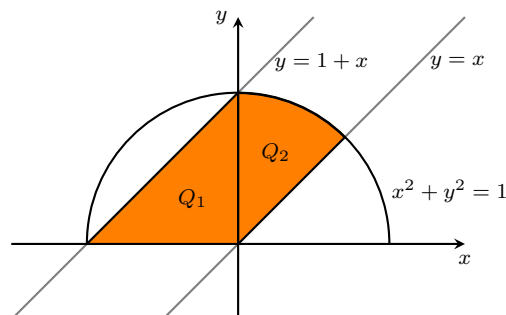
som leder till att

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Notera att $h(x) := \cos x / \sin x$ uppfyller att $f'(x) = -1/\sin^2 x < 0$ och är därmed injektiv. Alltså måste $x = y = z = \pi/3$. Därmed är $f(\pi/3, \pi/3, \pi/3) = 3^{3/2}/8$ ett globalt maxvärde.

13 Riemannsummor och variabelbyten i integratler

13.1. Lösning: Området kan delas upp i två delar Q_1 och Q_2 ,



Integralen över Q_1 ges av

$$\int_{-1}^0 x \left(\int_0^{1+x} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{x(1+x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{24}$$

och över Q_2 genom polärt koordinatbyte

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr d\theta = \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{16}.$$

Alltså är

$$\iint_Q xy \, dxdy = \iint_{Q_1} xy \, dxdy + \iint_{Q_2} xy \, dxdy = -\frac{1}{24} + \frac{1}{16} = \frac{3-2}{48} = \frac{1}{48}.$$

13.2. Lösning: Vi nyttjar polära koordinater och får

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \sqrt{1-x^2-y^2} \, dxdy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \sqrt{1-r^2} r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} \, dr \end{aligned}$$

Den första integralen löses exempelvis med hjälp av $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, vilket ger

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Den andra integralen löses genom variabelbytet $r = \sin \varphi$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} \, dr &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= - \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right]_0^{\pi/2} \\ &= 1/3 - 1/5 = 2/15. \end{aligned}$$

Tillsammans blir det

$$\iint_D x^2 \sqrt{1-x^2-y^2} \, dxdy = \pi/30.$$

14 Generaliserade integraler

14.1. Lösning: Vi konstaterar att integralen är generaliserad vid hela sin rand. Låt oss bilda

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq r \leq 1 - \varepsilon, \varepsilon \leq \theta \leq \pi/2 - \varepsilon \right\}.$$

Då gäller att f definierad som

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}}$$

är kontinuerlig och positiv på Ω_ε och Ω_ε är kompakt sådan att för varje kompakt delmängd $K \subset \Omega$ gäller att det existerar ε sådant att $K \subset \Omega_\varepsilon$.

Låt K vara en kompakt delmängd av Ω och låt ε vara sådant att $K \subset \Omega_\varepsilon$. Då gäller att

$$\begin{aligned} \iint_K \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}} dx dy &\leq \iint_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}} dx dy \\ &= \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\cos \theta \sin \theta (1 - r^2)}} r dr d\theta \\ &= \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}} \cdot \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} \end{aligned}$$

Av symmetriskäl är

$$\int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}} = 2 \int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}},$$

och denna integral är konvergent eftersom den kan jämföras med

$$\int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}},$$

ty

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}}} = \sqrt{\frac{\theta}{\cos \theta \sin \theta}} \rightarrow 1,$$

då $\theta \rightarrow 0$.

Den andra integralen kan beräknas enligt följande

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \left[-\sqrt{1 - r^2} \right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} = -\sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)} + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \rightarrow 1,$$

då $\varepsilon \rightarrow 0$.

Alltså är integralen konvergent.

14.2. Lösning: Eftersom funktionen som integreras växlar tecken så måste vi studera positiva och negativa delen var för sig.

Den positiva delen ges av området $D_1 = \{(x, y) : x > y > 0\}$. Vi får

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{x - y}{(x + y)^3} dx dy &= \int_0^{\pi/4} \int_0^\infty \frac{\cos \theta - \sin \theta}{r(\cos \theta + \sin \theta)^3} dr d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{dr}{r} \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^3} d\theta \end{aligned}$$

Den första integralen här är divergent och den andra integralen är ändlig eftersom funktionen är kontinuerlig och intervallet är kompakt.

Alltså är integralen divergent.

??. **Lösning:** Notera att integranden är positiv. Vi kan därmed nyttja itererad integration

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{(x^3 y + 1)^2} &= \{(s, t) = (x, x^2 y), ds dt = x^2 dx dy\} \\ &= \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{s^2(1+st)^2} ds dt \\ &= \int_1^{\infty} \frac{1}{s^2} \left[-\frac{1}{s(1+st)} \right]_1^{\infty} ds \\ &= \int_1^{\infty} \frac{1}{s^3(1+s)} ds\end{aligned}$$

Vi utför partialbråksuppdelning

$$\frac{1}{s^3(1+s)} = \frac{A + Bs + Cs^2}{s^3} + \frac{D}{1+s}$$

vilket ger att $A = C = 1$ och $B = D = -1$. Därmed är

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{s^3(1+s)} ds &= \int_1^{\infty} \left(\frac{1-s+s^2}{s^3} - \frac{1}{1+s} \right) ds \\ &= \left[-\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{s} + \ln s - \ln(1+s) \right]_1^{\infty} \\ &= \ln 2 - 1/2.\end{aligned}$$

15 Multipleintegraler och tillämpningar

15.1. Lösning: Eftersom integranden är positiv kan vi nyttja itererad integration. Vi kan för givet $0 \leq z$ integrera cirkelskivan $x^2 + y^2 < z$. Med andra

ord

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} e^{-x^2-y^2-z} dx dy dz &= \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\iint_{x^2+y^2 < z} e^{-x^2-y^2} \right) dz \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-r^2} r dr d\theta \right) dz \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-z} \left[\frac{e^{-r^2}}{-2} \right]_0^{\sqrt{z}} dz \\
 &= \pi \int_0^{\infty} e^{-z} (1 - e^{-z}) dz \\
 &= \pi \int_0^{\infty} (e^{-z} - e^{-2z}) dz \\
 &= \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-z} + \frac{e^{-2z}}{2} \right]_0^R \\
 &= \pi(1 - 1/2) = \pi/2.
 \end{aligned}$$

15.2. Lösning: Vi ser att $0 \leq z \leq 1 - x + y$, $0 \leq y \leq 1 - x^2$ och $-1 \leq x \leq 1$ vilket ger att

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x+y} dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x + y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[(1-x)y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left((1-x)(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (3/2 - x - 2x^2 + x^3 + x^4/2) dx = \int_0^1 (3 - 4x^2 + x^4) dx \\
 &= \left[3x - 4x^3/3 + x^5/5 \right]_0^1 = 3 - 4/3 + 1/5 = 28/15.
 \end{aligned}$$

15.3. Lösning: Skärningen mellan ytorna ges av $z(z-1) = 0$. Alltså ges volymen V av

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_{2x^2+5y^2 \leq 1} \left(\int_{2x^2+5y^2}^{\sqrt{2x^2+5y^2}} dz \right) dx dy \\
 &= \iint_{2x^2+5y^2 \leq 1} \left(\sqrt{2x^2+5y^2} - (2x^2+5y^2) \right) dx dy
 \end{aligned}$$

Låt oss utföra variabelbytet

$$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ y = \frac{r}{\sqrt{5}} \sin \theta \end{cases}$$

som ger att

$$dx dy = \frac{1}{\sqrt{10}} dr d\theta.$$

Vi får

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^2) \frac{r}{\sqrt{10}} dr d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{10}}$$

15.3. Lösning: Skärningen mellan ytorna sker då $z^2 + 2az - 3a^2 = 0$ vilket ger att $z = a$. Totala ytans area består nu av två delar som båda är funktionsytor på samma parametermängd $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$. De ges av $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ och $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$.

Låt oss börja med den övre ytan $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$. En parametrisering av ytan ges av $r(x, y) = (x, y, \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2})$ över D . Arealen ges av

$$\begin{aligned} A_1 &= \iint_D |r'_x \times r'_y| dx dy = \iint_D \left| \left(\frac{x}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \right| dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{3a^2}{3a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \sqrt{3}a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{r dr}{\sqrt{3a^2 - r^2}} d\theta \\ &= 2\sqrt{3}\pi a \left[-\sqrt{3a^2 - r^2} \right]_0^{\sqrt{2}a} = 2\pi a^2(3 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Låt oss nu studera arean av den undre ytan som ges av funktionen $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$ för $(x, y) \in D$. En parametrisering här ges av $r(x, y) = (x, y, 1/2a(x^2 + y^2))$ över D . Arealen blir

$$\begin{aligned} A_2 &= \iint_D |r'_x \times r'_y| dx dy = \iint_D \left| \left(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{a}, 1 \right) \right| dx dy \\ &= \frac{1}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} dx dy = \sqrt{1}a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}a} \sqrt{a^2 + r^2} r dr d\theta \\ &= 2\sqrt{3}\pi a \left[-\sqrt{3a^2 - r^2} \right]_0^{\sqrt{2}a} = \frac{2\pi}{3a} \left[(a^2 + r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{2\pi a^2(3\sqrt{3} - 1)}{3} \end{aligned}$$

Sammanlagt får vi den totala arean

$$A_1 + A_2 = 16\pi a^2/3.$$

15.5. Lösning: Volymen V ges av $1 - \mu(\Omega)$, där

$$\Omega = \{(x, y, z) : 2xyz \geq 1 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

och $\mu(\Omega)$ beskriver volymen av Ω . Vi får

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \int_{1/2}^1 \int_{1/2z}^1 \int_{1/2yz}^1 dx dy dz \\ &= \int_{1/2}^1 \int_{1/2z}^1 \left(1 - \frac{1}{2yz} \right) dy dz \\ &= \int_{1/2}^1 \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \ln \left(\frac{1}{2z} \right) \right) dz \end{aligned}$$

med hjälp av variabelbytet $t = 1/2z$ får vi värdet

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{4}.$$

16 Kurvintegraler och Greens formel

16.1. Lösning (Alt 1): Låt $r(\theta) = (2 \cos \theta, \sin \theta)$, där $0 \leq \theta \leq \pi/2$ vara en parametrisering av γ . Vi har då att $r'(\theta) = (-2 \sin \theta, \cos \theta)$ och

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u \cdot dr &= \int_0^{\pi/2} (-2 \cos \theta \sin \theta, 4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot (-2 \sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (4 \cos \theta \sin^2 \theta + 4 \cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta (3 \sin^2 \theta + 4(1 - \sin^2 \theta)) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta (4 - \sin^2 \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Här kan vi använda variabelbytet $t = \sin \theta$ och får

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta (4 - \sin^2 \theta) d\theta = \int_0^1 (4 - t^2) dt = 4 - 1/3 = 11/3.$$

Lösning (Alt 2): Låt oss sluta till kurvan längs med axlarna. Låt

$$D = (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 4y^2 \leq 4.$$

Enligt Greens formel får vi

$$\int_{\partial D} u \cdot dr = \iint_D 3x \, dx \, dy = 3 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2r \cos \theta \, 2r \, d\theta \, dr = 4.$$

Vi måste kompensera med kurvintegralerna längs axlarna. Vi börjar med den längs x -axeln

$$\int_0^2 (0, x^2) \cdot (dx, dy) = 0,$$

eftersom $dy = 0$. Nu till den längs y -axeln

$$\int_0^1 (0, -y^2) \cdot (dx, dy) = - \int_0^1 y^2 \, dy = 1/3.$$

Kurvintegralen blir därmed $4 - 1/3 = 11/3$.

?? Lösning: Låt $r = r(t)$, med $a \leq t \leq b$, vara en parametrisering av γ . Vi får

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \right| &= \left| \int_a^b (P(x, y), Q(x, y)) \cdot r'(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |(P(x, y), Q(x, y)) \cdot r'(t)| \, dt. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger oss

$$\begin{aligned}\int_a^b |(P(x, y), Q(x, y)) \cdot r'(t)| \, dt &\leq \int_a^b |(P(x, y), Q(x, y))| |r'(t)| \, dt \\ &\leq M \int_a^b |r'(t)| \, dt = ML\end{aligned}$$

eftersom

$$L = \int_a^b |r'(t)| \, dt.$$

16.3. Lösning: Låt oss använda Greens formel. Vi har att

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \iint_{\Omega} (36 - 4x^2 - 9y^2) \, dx \, dy,$$

där Ω är den mängd som innesluts av γ . Denna dubbelintegral maximeras om vi integrerar över det område där $36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0$. Ekvationen $36 - 4x^2 - 9y^2 = 0$ är detsamma som

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

och beskriver en ellips. Vi får därmed att γ ges av

$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$$

där $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

För att beräkna integralen genomför vi variabelbytet $x = 3r \cos \theta$ och $y = 2r \sin \theta$ och använder att

$$\left| \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} \right| = 6r.$$

Därmed är

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (36 - 4x^2 - 9y^2) \, dx \, dy &= 36 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) 6r \, dr \, d\theta \\ &= 432\pi \int_0^1 (r - r^3) \, dr = 432\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 108\pi.\end{aligned}$$

16.4. Lösning: Via Greens formel får vi

$$I = \int_{\gamma} (2xy - x^2) \, dx + (3x + y) \, dy = \iint_D (3 - 2x) \, dx \, dy,$$

där $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq \sqrt{x} : 0 \leq x \leq 1\}$. Alltså gäller att

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3 - 2x) \, dy \, dx = \frac{7}{10}.$$

17 Potentialer

17.1. Lösning:

a) Vi söker $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \sin x + x \cos x + ye^y \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x(y+1)e^y \end{cases}$$

Från andra ekvationen får vi

$$U(x, y) = xye^y + g(x),$$

där g är en godtycklig deriverbar funktion. Derivation med avseende på x ger oss

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ye^y + g'(x).$$

Detta ger att $g(x) = x \sin x$. Alltså ges potentialen av

$$U(x, y) = xye^y + x \sin x$$

vilket visar att F är ett potentialfält.

b) Eftersom F är ett potentialfält ges kurvintegralen av

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(\pi, 1) - U\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \pi e - \frac{\pi}{2}.$$

17.2. Lösning: Låt $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$. Randens till Ω består av γ och $\gamma_0 = \{(t, 0) : -1 \leq t \leq 1\}$. Med hjälp av Greens formel har vi att

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} (xy + \ln(x^2 + 1))dx + (4x + e^{y^2} + 3 \arctan y)dy \\ &= \iint_{\Omega} (4 - x) dx dy - \int_{\gamma_0} \ln(1 + x^2) dx + (1 + 4x) dy \\ &= \iint_{\Omega} 4 dx dy - \int_{-1}^1 (\ln(1 + t^2), 1 + 4t) \cdot (1, 0) dt \\ &= 2\pi - 2 \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = 2\pi - 2 \left[t \ln(1 + t^2) \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt \\ &= 2\pi - 2 \ln 2 + 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \\ &= 2\pi - 2 \ln 2 + 4 - 4 \left[\arctan t \right]_0^1 = \pi - 2 \ln 2 + 4. \end{aligned}$$

17.3. Lösning: Fältet är konservativt i första kvadranten ty

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y} + \frac{x}{(x+y)^2} = 0$$

Låt oss finna en potential U som uppfyller $\nabla U = (P, Q)$,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x+y}$$

betyder att $U(x, y) = x \ln(x+y) + c(x)$, för någon funktion c . Vi får att $c(x) = 0$ eftersom

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} + c'(x) = P(x, y).$$

Alltså är

$$\int_{\gamma} \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right) dx + \frac{x}{x+y} dy = U(2, 0) - U(0, 1) = 2 \ln 2.$$

18 Flödesintegraler i $\mathbb{R}^3$ och divergenssatsen

18.1. Lösning: Vi använder divergenssatsen och noterar att

$$\operatorname{div} u = 3.$$

Låt N vara den utåtriktade normalen till K , då gäller att

$$\iint_{\partial K} u \cdot N \, dS = \iiint_K 3 \, dx dy dz.$$

Låt oss införa de nya variablerna $u = x$, $v = \sqrt{2}y$ och $w = z$. Då gäller

$$dx dy dz = \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| du dv dw = \frac{1}{\sqrt{2}} du dv dw$$

och

$$\begin{aligned} \iiint_K 3 \, dx dy dz &= \frac{3}{\sqrt{2}} \iiint_{u^2+v^2 \leq \ln w \leq 1} du dv dw \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \int_1^e \left(\iint_{u^2+v^2 \leq \ln w} du dv \right) dw \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \int_1^e \pi \ln w \, dw \\ &= \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left[w \ln w - w \right]_1^e \\ &= \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

18.2. Lösning: Låt Y vara funktionsytan $x_3 = f(x_1, x_2)$, där

$$f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

med

$$D_f = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Flödet ges av

$$\Phi = \iint_Y u \cdot N \, dS,$$

där N är den uppåtriktade normalen och dS är ytelementet.

Eftersom Y är en funktionsyta så gäller att (x_1, x_2) kan användas som parametrar och

$$N(x_1, x_2) = \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2) \times f'_{x_2}(x_1, x_2)}{|f'_{x_1}(x_1, x_2) \times f'_{x_2}(x_1, x_2)|}$$

vilket ger

$$N \, dS = f'_{x_1}(x_1, x_2) \times f'_{x_2}(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 = (2x_1, 2x_2, 1) \, dx_1 dx_2.$$

Alltså blir

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} (x_1, x_2, 2x_1^2) \cdot (2x_1, 2x_2, 1) \, dx_1 dx_2 \\ &= 2 \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} 2x_1^2 + x_2^2 \, dx_1 dx_2 \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \\ &= 2 \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \right) \frac{1}{4} \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

18.3. Lösning: Låt $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ och $Y_b = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Divergensen av u ges av

$$\operatorname{div} u = 0 + 2x - 2z = 2x - 2z.$$

Enligt divergenssatsen ges det sökta flödet av

$$\begin{aligned}
 \iint_Y (u \cdot N) dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx \, dy \, dz - \iint_{Y_b} (u \cdot (0, 0, -1)) dS \\
 &= 2 \iiint_{\Omega} (x - z) \, dx \, dy \, dz + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \, dx \, dy \\
 &= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\
 &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 1 - x^2 - y^2 \, dx \, dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\
 &= \frac{3}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy - \pi \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta - \pi \\
 &= \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

18.4. Lösning: Enligt divergenssatsen är

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} F \cdot N \, dS &= \iiint_K \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_K (12 - 3(x^2 + y^2 + z^2)) \, dx \, dy \, dz,
 \end{aligned}$$

där K har randen Ω . Vi ser att värdet av denna integral maximeras då

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

eftersom integranden är icke-negativ precis på denna mängd.

Via polära koordinater får vi värdet på integralen till

$$\frac{256\pi}{5}.$$

19 Stokes sats

19.1. Lösning: Låt oss använda Stokes sats. Vi kan parametrisera ytan Y innanför cylindern mha

$$r(x, y) = (x, y, y^2 - x^2)$$

på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vi får nu

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \iint_Y \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \iint_D \operatorname{rot} F \cdot (r'_x \times r'_y) \, dxdy \\ &= \iint_D (x, -y, 0) \cdot (2x, -2y, 1) \, dxdy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dxdy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr d\theta = \pi \end{aligned}$$