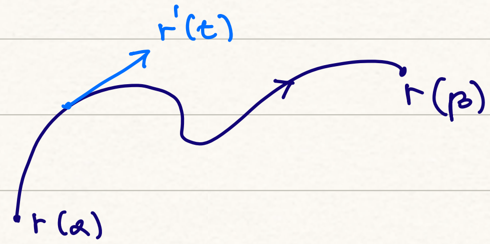
F18 Ytintegraler och Divergenssatsen

Låt $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ och $\gamma \subset \Omega$ vara en orienterad kurva med parametriseringen $r: [\alpha, \beta] \to \gamma$.

Kurvintegralen av u längs γ definieras som

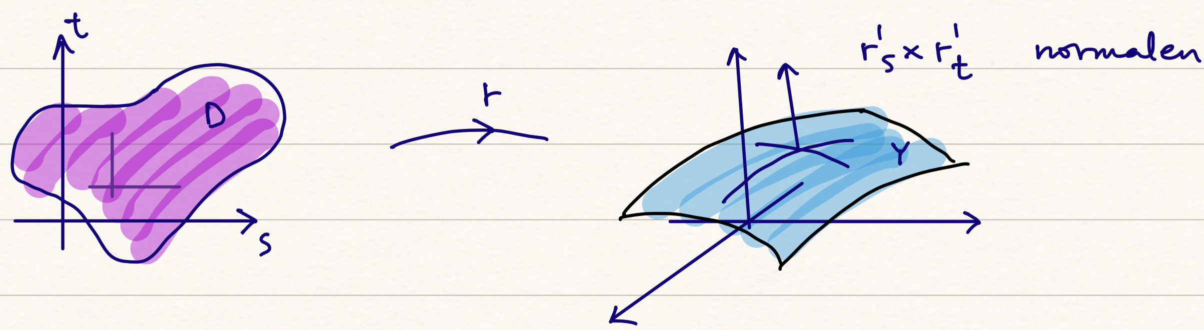


$$\int_\gamma u(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_\gamma u(r(t)) \cdot \underbrace{\frac{r'(t)}{|r'(t)|}}_{T(t)} \underbrace{|r'(t)|\, dt}_{\text{bågelementet } ds}$$

$$= \int_\gamma u(r(t)) \cdot T(t)\, ds$$

Ytintegraler:

Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara en yta med parameterframställningen $r: D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}^2$.



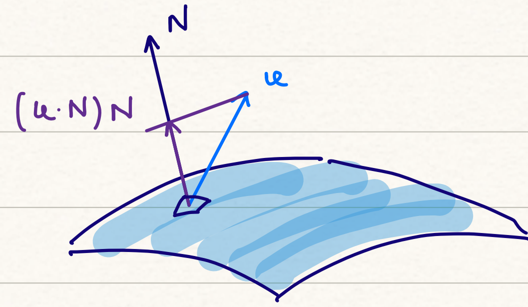
Ex: Sfären $r(\theta, \varphi) = (R\cos\varphi \sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta)$

$0 \le \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$.

$$N(\theta,\varphi) = r'_\theta \times r'_\varphi = R\sin\theta\, r(\theta,\varphi)$$

Låt N vara enhetsnormalen av ytan, dvs

$$N(s,t) = \frac{r'_s \times r'_t}{|r'_s \times r'_t|}.$$



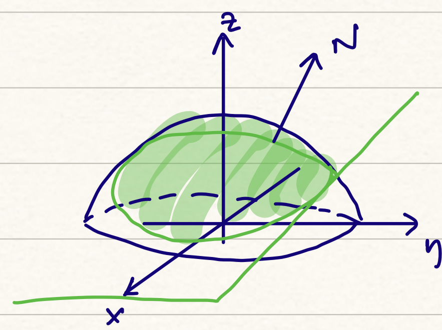
Flödesintegralen definieras nu som $\iint_Y u \cdot N \, dS$

där $dS = |r'_s \times r'_t| \, ds dt$ är areaelementet.

$$\iint_Y u \cdot N \, dS = \iint_D \left(u(r(s,t)) \cdot \frac{(r'_s \times r'_t)}{|r'_s \times r'_t|} \right) |r'_s \times r'_t| \, ds dt$$

$$= \iint_D u(r(s,t)) \cdot (r'_s \times r'_t) \, ds dt.$$

Ex: Bestäm flödet av $u(x,y,z) = (y^3, z^2, x)$ nedåt genom den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $z = 2x+1$.



$r(s,t) = (s, t, 4 - s^2 - t^2)$

$$N(s,t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2s \\ 0 & 1 & -2t \end{vmatrix}$$

$$= (2s, 2t, 1)$$

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \quad 4 - x^2 - y^2 = 2x + 1 \iff x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4 \iff (x+1)^2 + y^2 = 4.$$

Antag $r: D \to Y$ där $D = \{(s,t) : (s+1)^2 + t^2 \leq 4\}$.

Vi får

$$\Phi_U = \iint_Y u \cdot N \, dS = \iint_D u(r(s,t)) \cdot (2s, 2t, 1) \, ds\,dt$$

$$= \iint_{(s+1)^2+t^2 \leq 4} u(s, t, 4 - s^2 - t^2) \cdot (2s, 2t, 1) \, ds\,dt$$

$$= \iint_{(s+1)^2+t^2 \leq 4} (t^3, (4 - s^2 - t^2)^2, s) \cdot (2s, 2t, 1) \, ds\,dt$$

udda i t.

$$= \iint_{(s+1)^2+t^2 \leq 4} \left(2st^3 + 2t(4 - s^2 - t^2)^2 + s\right) ds\,dt = \iint_{(s+1)^2+t^2 \leq 4} s \, ds\,dt$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x = s+1 \\ y = t \end{matrix} \right\} = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x-1) \, dx\,dy = -\iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx\,dy = \underline{\underline{-\pi 4}}$$

$$\Phi_N = -\Phi_U = \underline{\underline{4\pi}}.$$

Definition: Låt $u : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ vara ett vektorfält av klass C^1. Då definieras divergensen av u som

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Ex: $u(x) = (x_2^2 x_1, x_1 x_3, \sin x_3)$

$$\operatorname{div} u = x_2^2 + 0 + \cos x_3 = x_2^2 + \cos x_3.$$

Notera att $(\operatorname{div} u) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Divergenssatsen: (Gauss sats)

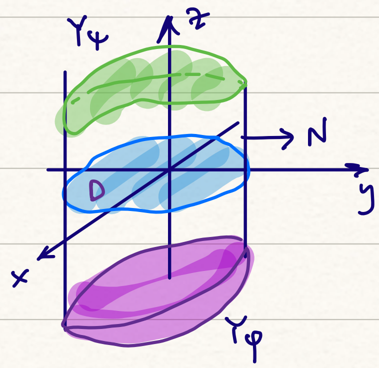
Låt $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett C^1-fält. Om det kompakta området K har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor med utåtriktad enhetsnormal N så

$$\iint_{\partial K} u \cdot N \, dS = \iiint_K \operatorname{div} u \, dx\,dy\,dz$$

Bevis: I specialfallet att det finns φ, ψ och D så att

$$K = \{(x,y,z) : \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y), \ (x,y) \in D\}$$

Låt oss visa att



$$\iint_{\partial K} (0,0,u_3) \cdot N \, dS = \iiint_K \frac{\partial u_3}{\partial z} \, dx\,dy\,dz$$

$$HL = \iiint_K \frac{\partial u_3}{\partial z} \, dx\,dy\,dz = \iint_D \Big[u_3 \Big]_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dx\,dy$$

$$= \iint_D \big(u_3(x,y,\psi(x,y)) - u_3(x,y,\varphi(x,y)) \big) \, dx\,dy$$

Flödesintegralen längs sidan har normalvektor där z komponenten är 0. Alltså är $(0,0,u_3) \cdot N = 0$.

$$\Phi_{Y_\psi} = \iint_D (0,0,u_3) \cdot (-\psi'_x, -\psi'_y, 1) \, dx\,dy = \iint_D u_3(x,y,\psi(x,y)) \, dx\,dy$$

$$\Phi_{Y_\varphi} = \iint_D (0,0,u_3)\cdot(\varphi'_x, \varphi'_y, -1)\,dx\,dy = -\iint_D u_3(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy$$

Analogt kan vi visa att

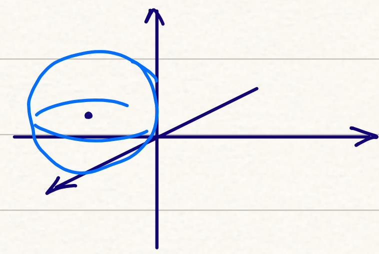
$$\iint_{\partial K} (0,u_2,0)\cdot N\,dS = \iiint_K \frac{\partial u_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$$

$$\iint_{\partial K} (u_1,0,0)\cdot N\,dS = \iiint_K \frac{\partial u_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

Tillsammans $\displaystyle\iint_{\partial K} u\cdot N\,dS = \iiint_K \operatorname{div} u\,dx\,dy\,dz$

Ex: Beräkna flödet av vektorfältet $F(x,y,z) = (x^3y, yz, xz)$ ut genom sfären med centrum i $(1,0,1)$ och radie 1.

Lösning: Divergenssatsen ger



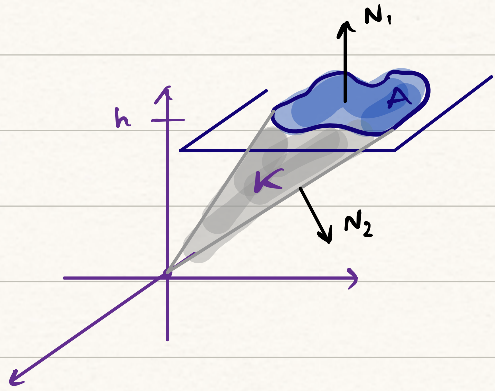
$$\Phi = \iiint_K (3x^2y + z + x)\,dx\,dy\,dz$$

$$K = \{(x,y,z) : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$$

$$\Phi = \iiint_K (x+z)\,dx\,dy\,dz = 2\iiint_K x\,dx\,dy\,dz = \{x-1=u\}$$

$$= 2\iiint_{u^2+y^2+(z-1)^2\leq 1} (1+u)\,du\,dy\,dz = 2\iiint_{u^2+y^2+(z-1)^2\leq 1} du\,dy\,dz = \frac{8\pi}{3}$$

Ex: Bestäm volymen av den kon som har basarea A och höjd h.



Lösning:

Studera fältet $u = (x_1, x_2, x_3)$.

$\operatorname{div} u = 1+1+1 = 3.$

$$\mu(K) = \iiint_K dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{3} \iiint_K \operatorname{div} u \, dx\,dy\,dz = \frac{1}{3} \iint_{\partial K} u \cdot N \, dS = \frac{1}{3} \iint_{Y_1} (x_1, x_2, x_3)(0,0,1)\, dS$$

$$+ \frac{1}{3} \iint_{Y_2} \underbrace{x \cdot N_2}_{=0} \, dS = \frac{1}{3} \iint_{Y_1} h \, dx\,dy + 0 = \frac{hA}{3}.$$