

F16 Kurvintegraler

Låt γ vara en orienterad kurva i $\mathbb{R}^2$ med parametriseringen $r = r(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

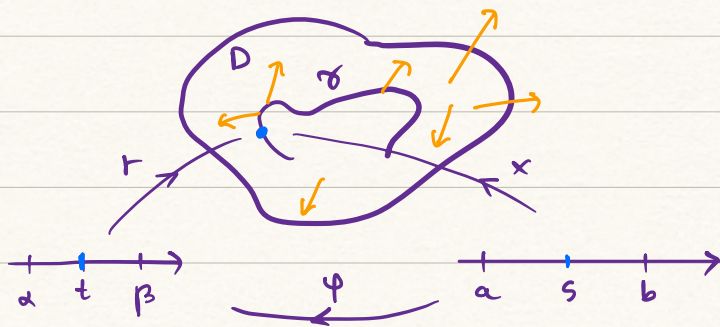


Vi har sedan tidigare att längden av γ ges av

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{\alpha}^{\beta} |r'(t)| dt \quad \text{som är oberoende av parametriseringen.}$$

Vektorfält: Låt $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $\gamma \subset D$ vara en kurva med de bijektiva parametriseringarna $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \gamma$ och $x: [a, b] \rightarrow \gamma$

Sats:
$$\int_{\alpha}^{\beta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalärprodukt}}}{F(r(t)) \cdot r'(t)} dt = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalärprodukt}}}{F(x(s)) \cdot x'(s)} ds$$



Bevis: Låt $\varphi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ vara sådan att $\varphi(s) = t$ givet att $r(t) = x(s)$.

Från kedjeregeln $x'(s) = \frac{d}{ds}(x(s)) = \frac{d}{ds}(r(\varphi(s)))$

$$= \underbrace{r'(\varphi(s))}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{\varphi'(s)}_{\text{tal}}$$

Därmed är

$$HL = \int_a^b F(x(s)) \cdot x'(s) ds = \int_a^b F(r(\varphi(s))) \cdot r'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) ds$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(s) \\ dt = \varphi'(s) ds \end{array} \right\} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = VL \quad \square$$

Skriver vi:

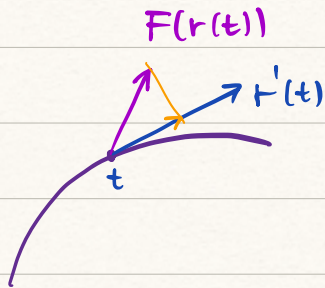
$$\begin{aligned} \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_a^b F(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt = \int_a^b F(x(t), y(t)) \cdot (x'(t) dt, y'(t) dt) \\ &= \int_{\gamma} F(x, y) \cdot (dx, dy) = \int_{\gamma} F \cdot dr. \end{aligned}$$

Vi inför notationen $\int_{\gamma} F \cdot dr$ för kurvintegralen av F över γ .

Alternativt om $F = (P, Q)$ och $dr = (dx, dy)$

$$\int_{\gamma} (P, Q) \cdot (dx, dy) = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Notera:



Endast bidrag från den del av vektorfältet som går i kurvans riktning.

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot \underbrace{\frac{r'(t)}{|r'(t)|}}_{T(t)} |r'(t)| dt$$

$$= \int_a^b F(r(t)) \cdot T(t) ds, \quad \text{där } ds = |r'(t)| dt \text{ är bågelementet}$$

Ex: Låt $F(x,y) = (y, -x)$ från $(1,0)$ till $(0,-1)$

a) längs en rät linje

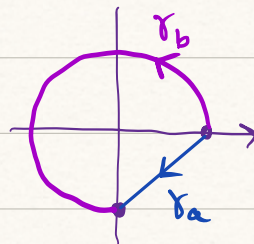
b) längs enhetscirkeln moturs

Lösning:

a) $r(t) = (1-t, -t)$, $0 \leq t \leq 1$

$$F(r(t)) = F(1-t, -t) = (-t, t-1)$$

$$r'(t) = (-1, -1)$$



$$\int_{\gamma_a} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 (-t, t-1) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 (t - t + 1) dt = 1$$

b) $r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

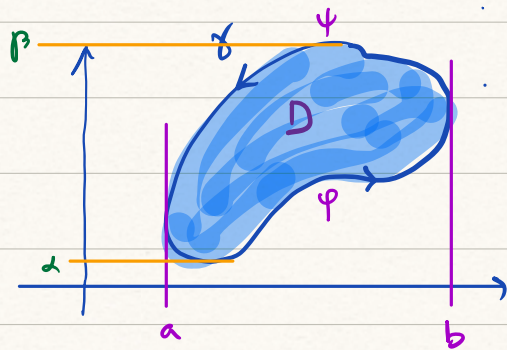
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_b} F \cdot dr &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} F(r(\theta)) \cdot r'(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin \theta, -\cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\theta = - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Kurvintegraler beror av vägen. (ibland inte som vi kommer att se senare).

Greens formel: Låt $\varphi, \psi \in C^1([a,b])$ och låt

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}.$$

$\gamma = \partial D$ orienterad så att området är på vänster sida, vilket vi kallar positiv orientering.



Vi har att $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ där $\gamma_1 = \{(t, \varphi(t)) : a \leq t \leq b\}$
 $\gamma_2 = \{(t, \psi(t)) : a \leq t \leq b\}$

Dela upp vektorfältet enligt $(P, Q) = (P, 0) + (0, Q)$ och
 studera

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (P, 0) \cdot dr &= \int_{\gamma_1} (P, 0) \cdot dr - \int_{\gamma_2} (P, 0) \cdot dr = \\ &= \int_a^b (P(t, \varphi(t)), 0) \cdot (1, \varphi'(t)) dt - \int_a^b (P(t, \psi(t)), 0) \cdot (1, \psi'(t)) dt \\ &= \int_a^b (P(t, \varphi(t)) - P(t, \psi(t))) dt = - \int_a^b (P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))) dx \\ &= - \int_a^b \left[P(x, y) \right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = - \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \end{aligned}$$

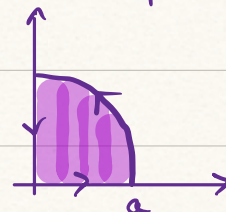
Analogt kan man visa att $\int_{\gamma} (0, Q) \cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$.

Greens formel: Låt $F = (P, Q)$ vara ett C^1 -fält definierat
 på den kompakta mängden D och låt $\gamma = \partial D$ vara
 en styckvis C^1 -kurva med positiv orientering.
 Då gäller att

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ex: Beräkna $I = \int_{\gamma} (x - y^3) dx + (y^3 + x^3) dy$, $\gamma = \partial D$ positivt orienterad

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$



Lösning: Enligt Greens formel är

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$P(x, y) = x - y^3$$

$$Q(x, y) = y^3 + x^3$$

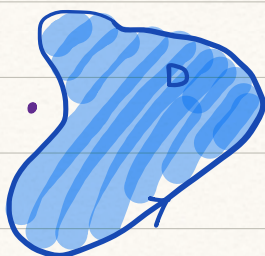
$$I = \iint_D (3x^2 + 3y^2) dx dy = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^3 dr d\theta = \frac{3\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \underline{\underline{\frac{3\pi a^4}{8}}}$$

Ex: (Magnetfält) $B = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

a) Visa att $\int_{\partial D} B \cdot dr = 0$ för varje kompakt område som ej innehåller origo.

b) Visa att $\int_{\gamma} B \cdot ds = 2\pi$ för varje sluten kurva γ som går ett varv runt origo i positiv riktning.

Lösning: a)



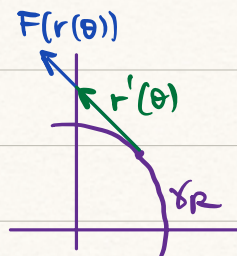
$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2 - 2x^2 - (-x^2-y^2 + 2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Ansår från Greens formel $\int_{\partial D} B \cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$

b) Beräkna $\int_{\gamma_R} B \cdot ds$ där γ_R är cirkeln

med radie R moturs.



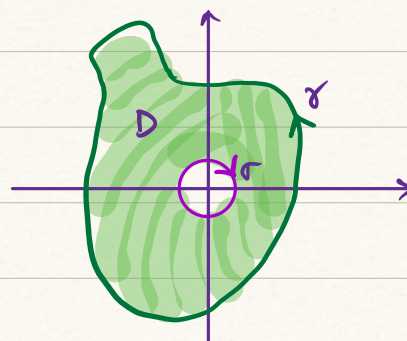
$$r(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_{\partial D} B \cdot dr = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R \sin \theta}{R^2}, \frac{R \cos \theta}{R^2} \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \underline{\underline{2\pi}}$$

Låt γ vara en kurva runt origo.

Låt D vara det inre av γ
förutom de punkter inom
 $B_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$.

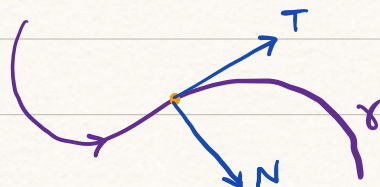


Låt $\sigma = \partial B_\varepsilon$. Sedan tidigare har vi att $\int_{-\sigma} B \cdot dr = 2\pi$

$$\int_{\gamma} B \cdot dr + \int_{\sigma} B \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} B \cdot dr = - \int_{\sigma} B \cdot dr = \underline{\underline{2\pi}}$$

Flöde: Låt $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett vektorfält och γ en orienterad C^1 -kurva.

$$N = RT, \text{ där } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Vi definierar flödesintegralen av u över γ som

$$\int_{\gamma} u \cdot N ds.$$

$$\text{Notera att } \int_{\gamma} u \cdot N ds = \int_{\gamma} u \cdot (RT) ds = \int_{\gamma} (R^t u) \cdot T ds$$

$$= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \cdot T ds = \int_{\gamma} -u_2 dx + u_1 dy.$$

Låt D vara ett kompakt område med C^1 -rand $\gamma = \partial D$.

Om nu $u \in C^1(D)$ så gäller Greens formel och vi får

$$\int_{\gamma} u \cdot N ds = \int_{\gamma} -u_2 dx + u_1 dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)}_{\text{lokala produktivitet}} dx dy \quad (\text{Gauss sats})$$

Notera $u \cdot (RT) = u^t R^t T = u^t (R^t)^t T = (R^t u)^t T = (R^t u) \cdot T.$