

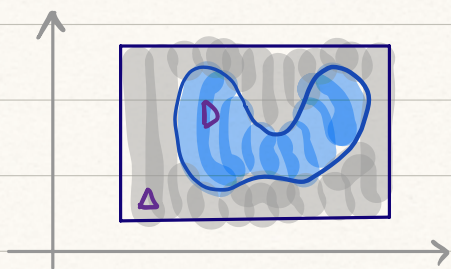
F12 Integration över begränsade mängder

Definition: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion,
 $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd,

$$f_D(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Vi säger att f är integrerbar på D om f_D är integrerbar på någon rektangel Δ sådan att $D \subset \Delta$ och

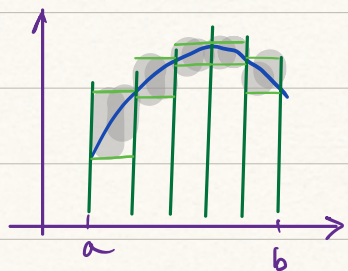
$$\iint_D f(x, y) dx dy := \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy.$$



Nollmängder: En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kallas en nollmängd om
vi för varje $\varepsilon > 0$ kan täcka Ω med rektanglar
 Δ_i vars sammanlagda area är högst ε . Med andra
ord $\Omega \subset \bigcup_i \Delta_i$ med $\sum_i \mu(\Delta_i) < \varepsilon$.

Lemma: Grafen till en kontinuerlig funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
är en nollmängd i planet.

Beris:



Eftersom f är likformigt kontinuerlig
gäller att för varje $\varepsilon > 0$ finns δ :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{då} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Delar nu in $[a, b]$ i delintervall Δ_i med $\mu(\Delta_i) < \delta$.

Vi kan nu täcka grafen $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ med rektanglar R_i med höjd mindre än $\frac{\varepsilon}{b-a}$ och bredd $\mu(\Delta_i) < \delta$.

Ants:n

$$\sum_i \mu(R_i) < \sum_i \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \mu(\Delta_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \mu(\Delta_i) = \varepsilon \quad \square$$

Ex: $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}$ (Uppräkneligt många punkter).

Bilda $\frac{\varepsilon}{2^j}$ kring $\underbrace{\frac{\varepsilon}{2^j}}_{x_j}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \cdot 1 \quad \text{Geometrisk serie.} \quad \mathbb{R} \text{ nollmängd}$$

Definition: En mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ kallas kvadrerbar om randen ∂D är en nollmängd.

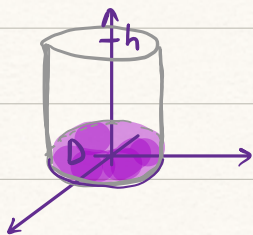
Lemma: Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D . Då är f integrerbar på D .

Definition: Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara kvadrerbar, då definieras arean av D som $\mu(D) := \iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_D dx \, dy$.

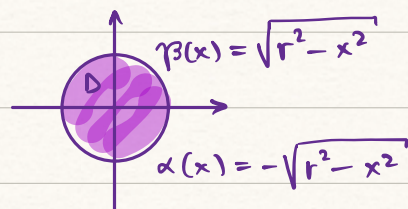
Sats: Låt $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerliga, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ och låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då är f integrerbar och

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Ex: Visa att volymen av en cylinder är $\pi \cdot r^2 \cdot h$.



$$V = \iint_D h \, dx \, dy$$



$$V = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h \, dy \right) dx = h \int_{-r}^r \left(2 \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = 2h \int_{-r}^r \left[y \right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dx$$

$$= 2h \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} \, dx = 4h \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \theta \\ dx = r \cos \theta \, d\theta \end{array} \right\} = 4h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2 \sin^2 \theta} \cdot r \cos \theta \, d\theta$$

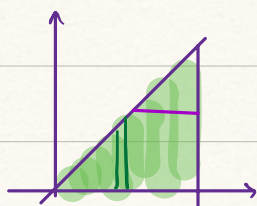
$$= 4h \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = 4hr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \pi hr^2 + 2hr^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\pi hr^2}}.$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \Rightarrow \cos^2 \theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

Ex: Beräkna $I = \iint_Q \frac{1}{x-y+1} \, dx \, dy$, $Q = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$

Lösning:



$$I = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x-y+1} \, dy \, dx = \int_0^1 \left[-\ln|x-y+1| \right]_0^x \, dx$$

$$= \int_0^1 (0 + \ln(1+x)) \, dx = \left[(1+x) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{x-y+1} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\ln|x-y+1| \right]_y^1 \, dy = \int_0^1 \ln(2-y) \, dy = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-y \\ dt = -dy \end{array} \right\}$$

$$= -\int_1^0 \ln(1+t) \, dt = \int_0^1 \ln(1+t) \, dt. \quad \text{Samma som ovan.}$$

Ex: Beräkna $I = \iint \sin x^2 dx dy$ där Q är det begränsade område i första Q kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^3$.

Lösning:



$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^3}^x \sin x^2 dy dx = \int_0^1 \sin x^2 [y]_{x^3}^x dx \\ &= \int_0^1 \sin x^2 (x - x^3) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-t) \sin t dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left([-\cos t (1-t)]_0^1 - \int_0^1 \cos t dt \right) = \frac{1}{2} \left(0 + 1 - [\sin t]_0^1 \right) = \frac{1 - \sin 1}{2}$$

Medelvärdessatsen för integraler:

Antag att $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^2$ kvadrerbart och bågvis sammanhängande och f är kontinuerlig.

Då finns $M = \max_{x \in D} f(x)$ och $m = \min_{x \in D} f(x)$.

Antag är $m \leq f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in D$.

$$\iint_D m dx dy \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D M dx dy$$

$$m \mu(D) \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq M \mu(D)$$

$$m \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y) dx dy \leq M.$$

Eftersom $\triangleright$ är bäst sammanhängande finns

$$(a,b) \in \triangleright \text{ så att } f(a,b) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y) dx dy$$

Ex: Bestäm det största och minsta värdet av
(39%) $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ då x, y och z är vinklarna i en triangel.

Lösning: Optimera $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$
under bivillkoret $g(x,y,z) = x + y + z = \pi$.

På randen gäller $f(0,y,z) = f(x,0,z) = f(x,y,0) = 0$.

$$\nabla f = (\cos x \sin y \sin z, \sin x \cos y \sin z, \sin x \sin y \cos z)$$

$$\nabla g = (1, 1, 1).$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \sin y \sin z = \lambda \\ \sin x \cos y \sin z = \lambda \\ \sin x \sin y \cos z = \lambda \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

$$(1) - (2): (\cos x \sin y - \sin x \cos y) \sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\varphi(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \varphi'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

φ injektiv. Alltså är $x = y$.

Symmetri ger $x = y = z = \frac{\pi}{3}$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$