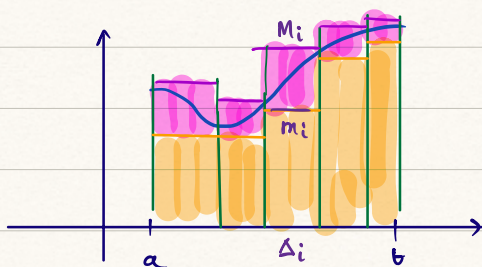


F11 Integralen över rektanglar

Inledande exempel: $d=1$.



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i] \quad \mu(\Delta_i) = x_i - x_{i-1}$$

mättet av Δ_i

$$M_i = \max_{x \in \Delta_i} f(x)$$

$$m_i = \min_{x \in \Delta_i} f(x)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mu(\Delta_i) \leq \sum_{i=1}^n M_i \mu(\Delta_i)$$

Bilda
$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \mu(\Delta_i) : m_i \leq f(x), x \in \Delta_i \right\}$$

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^n M_i \mu(\Delta_i) : M_i \geq f(x), x \in \Delta_i \right\}$$

Om $\sup L = \inf U$ så är f integrerbar och

$$\int_a^b f(x) dx = \sup L.$$

Vilka problem finns i flera variabler?

- Områden, rand, obegränsade mängder och funktioner.

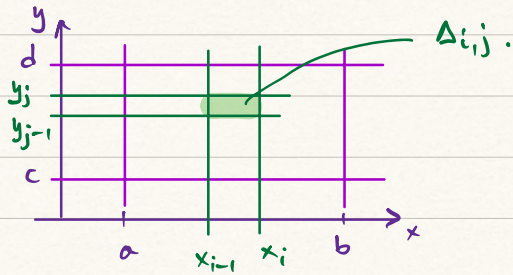
Integration över rektanglar ($d=2$)

En funktion $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, kallas **enkel** om

1) Δ är en union av axel-parallella rektanglar

på formen $\Delta_{i,j} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x < x_i, y_{j-1} \leq y < y_j\}$

2) Φ är konstant på $\Delta_{i,j}$.



$$\mu(\Delta_{i,j}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

För en enkel funktion Φ på $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ definieras

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy := \sum_{i,j} c_{i,j} \mu(\Delta_{i,j}) \quad , \quad \text{där} \quad c_{i,j} = \Phi(x) \quad , \quad x \in \Delta_{i,j}.$$

Räkne regler: Enkla funktioner Φ och Ψ på Δ .

$$a) \quad \iint_{\Delta} \alpha \Phi(x, y) dx dy = \alpha \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad \iint_{\Delta} (\Phi(x, y) + \Psi(x, y)) dx dy = \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy + \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy.$$

(ses genom förfning av området.)

$$c) \quad \text{om} \quad \Phi \leq \Psi \quad \text{så} \quad \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy$$

$$d) \quad \left| \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\Phi(x, y)| dx dy$$

Beris av d: $\pm \Phi(x, y) \leq |\Phi(x, y)|$.

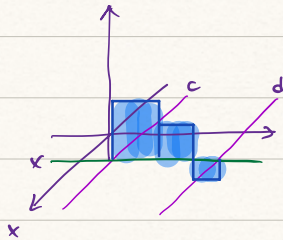
$$\text{Från c) är nu} \quad \iint_{\Delta} \pm \Phi(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} |\Phi(x, y)| dx dy$$

$$\text{från a) följer} \quad \pm \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} |\Phi(x, y)| dx dy. \quad \square$$

En variabel i taget: $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Φ enkel, $\Delta = [a, b] \times [c, d]$.

Fixera x och studera $\varphi(y) = \Phi(x, y)$, $x \in [a, b]$

φ blir en enkel funktion på $[c, d]$



Antsän finns $A_x = \int_c^d \varphi(y) dy$

$$I = \int_a^b A_x dx = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x, y) dy \right) dx.$$

$$= \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy, \text{ där } \Delta = [a, b] \times [c, d].$$

Riemannintegraler:

Definition: Låt $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ rektangel

$$\text{Bilda } L = \left\{ \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy : \Phi \leq f, \Phi \text{ enkel funktion} \right\}$$

$$U = \left\{ \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy : \Psi \geq f, \Psi \text{ enkel funktion} \right\}.$$

Om $\sup L = \inf U$ så är f integrerbar på Δ

$$\text{och } \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy := \sup L.$$

Räknereglerna för integraler av enkla funktioner kan utvidgas till integrerbara funktioner.

Sats: Om f är en integrerbar funktion över en rektangel $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och om högerleden är definierade så gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Antag att högerleden är definierade.

Beris: För varje enkel funktion $\Psi \geq f$ gäller att

$$\int_c^d f(x, y) dy \leq \int_c^d \Psi(x, y) dy, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \int_a^b \left(\int_c^d \Psi(x, y) dy \right) dx = \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy$$

Analogt gäller för varje $\Phi \leq f$ att

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \geq \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x, y) dy \right) dx = \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx$$

Ansän $\sup L \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \inf U$

med andra ord $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy. \quad \blacksquare$

Exempel: Låt $\Delta = [0, 1] \times [0, 1]$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y=0 \text{ och } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Från envariabelanalys $\int_0^1 f(x, 0) dx$ existerar ej.

Men, $\Phi = 0$ är en enkel funktion sådan att $f \geq \Phi$
 och $\Psi = \begin{cases} 0, & \frac{1}{n} \leq y \leq 1, x \in [0, 1] \\ 1, & 0 \leq y < \frac{1}{n}, x \in [0, 1] \end{cases}$ enkel med $f \leq \Psi$.

Nu gäller att $\iint_{\Delta} \Phi dx dy = 0$, $\iint_{\Delta} \Psi dx dy = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$, då $n \rightarrow \infty$.

Alltså är f integrerbar med $\iint_{\Delta} f(x,y) dx dy = 0$.

(*) Sats: Om f är kontinuerlig på $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ så är f integrerbar på Δ .

Definition: En funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara likformigt kontinuerlig om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ för varje $x, y \in D$ sådana att $|x - y| < \delta$.

Vi kommer att använda:

Sats: Låt $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och $K \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt mängd. Då är f likformigt kontinuerlig.

Bers av (*): Alltså är f likformigt kontinuerlig.

Låt $\varepsilon > 0$. Vill visa att det finns ^{enklare funktioner} Φ och Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och

$$\iint_{\Delta} \Psi(x,y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x,y) dx dy < \varepsilon.$$

Eftersom f är likformigt kontinuerlig finns ^{för $\frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}$} ett $\delta > 0$ sådant

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \quad \text{för varje } |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta.$$

Dela nu in Δ i rektanglar Δ_i sådana att diagonalen är mindre än δ .

$$\text{Antag är } M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \quad \text{på } \Delta_i.$$

Definiera $\Psi(x, y) = M_i$ på Δ_i och $\Phi(x, y) = m_i$ på Δ_i .

$$\text{Vi är klara ty } \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \sum_i (M_i - m_i) \mu(\Delta_i)$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \sum \mu(\Delta_i) = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Sats: Om f är kontinuerlig på $\Delta = [a, b] \times [c, d]$
så gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Bemär: Det räcker att visa att HL är definierade.

Fixera $x \in [a, b]$ och notera att $y \mapsto f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion på $[c, d]$.

Därför existerar

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

för $x \in [a, b]$.

Om A är kontinuerlig är A integrerbar och

$$\int_a^b A(x) dx \quad \text{existerar.}$$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns $\delta > 0$ sådant att

$$|A(x_1) - A(x_2)| = \left| \int_c^d (f(x_1, y) - f(x_2, y)) dy \right|$$

$$\leq \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)| dy \leq (*)$$

Eftersom f är likformigt kontinuerlig gäller att för $\frac{\varepsilon}{d-c}$ finns ett δ sådant att

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{d-c} \quad \text{för alla } |(x_1, y) - (x_2, y)| < \delta.$$

$$\text{Alltså är } (*) \leq \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c} dy = \varepsilon. \quad \square$$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \text{Beräkna} \quad \iint_{[0,1] \times [0,1]} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x dx \right) y^2 dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$