F1 Introduktion, $\mathbb{R}^n$ och mängder i $\mathbb{R}^n$.

(Grundläggande olikheter i $\mathbb{R}^n$
Begrepp, mängder)

- Välkomna + vem är jag?
- Canvassidan
- Föreläsningsplan och rekommenderade uppgifter
- Boken.

Rummet $\mathbb{R}^n$: (använder begrepp definierade från Linjär Algebra).

Låt $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ och $s \in \mathbb{R}$

då definierar vi

$\bar{x} + \bar{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ (Addition)

$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ (Skalärprodukt)

$s \cdot \bar{x} = (sx_1, sx_2, \dots, sx_n)$ (Multiplikation med skalär)

Längden av $\bar{x}$: (Avståndet från x till origo)

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Vinkeln mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$ definieras som

$$\theta = \arccos\left(\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}\right).$$ Är detta väldefinierat?

Sats: (Cauchy-Schwarz olikhet)

Låt $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, då gäller att $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$

Likhet gäller endast då $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är linjärt beroende.

Bevis: Om $\bar{x} = \bar{0}$ så är $VL = HL = 0$.

Antag nu att $\bar{x} \neq \bar{0}$. Vi kan då bilda $\bar{u} = \bar{y} + t\bar{x}$, $t \in \mathbb{R}$.

Vi har att $0 \leq |\bar{u}|^2 = (\bar{y} + t\bar{x}) \cdot (\bar{y} + t\bar{x})$

$$= |\bar{y}|^2 + t^2 |\bar{x}|^2 + 2t(\bar{x} \cdot \bar{y}) = |\bar{x}|^2 \left(t^2 + 2 \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}|^2} t + \frac{|\bar{y}|^2}{|\bar{x}|^2} \right)$$

$$= |\bar{x}|^2 \left(\left(t + \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}|^2} \right)^2 + \frac{|\bar{y}|^2}{|\bar{x}|^2} - \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{x}|^4} \right)$$

$$= |\bar{x}|^2 \left(t + \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}|^2} \right)^2 + |\bar{y}|^2 - \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{x}|^2}.$$

Eftersom detta stämmer för alla $t \in \mathbb{R}$ kan vi välja

$t = -\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}|^2}$. Vi får då $0 \leq |\bar{y}|^2 - \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{x}|^2} \Leftrightarrow |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$.

Enda olikheten är $0 \leq |\bar{u}|^2 \Leftrightarrow \bar{u} = 0 \Leftrightarrow \bar{y} + t\bar{x} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är linjärt beroende. ■

Sats: (Triangelolikheten)

Låt $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, då gäller att $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$

Likhet gäller om och endast om $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är lika riktade.

Bevis: Låt oss visa det ekvivalenta påståendet

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 \leq (|x| + |y|)^2.$$

$$VL = |\bar{x} + \bar{y}|^2 = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 + 2(\bar{x} \cdot \bar{y})$$

$$\leq |\bar{x}|^2 + |y|^2 + 2|\bar{x}| \cdot |\bar{y}| = (|\bar{x}| + |\bar{y}|)^2 = HL.$$

↑ Cauchy-Schwarz olikhet

Likhet gäller om och endast om $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$

$\Leftrightarrow$ $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x} \cdot \bar{y}| = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$.

$\Leftrightarrow$ $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är linjärt beroende och $\bar{x} \cdot \bar{y} \geq 0$.

$\Leftrightarrow \quad \bar{x} = t\bar{y}$ där $t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}$ och $\bar{y}$ är likriktade. ∎

<u>Följdsats:</u> (Omvända triangelolikheten)

Låt $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, då gäller att $\big| |\bar{x}| - |\bar{y}| \big| \leq |x+y|$

<u>Bevis:</u>

$$|\bar{x}| = |\bar{x} + \bar{y} + (-\bar{y})| \underset{\text{triangelolikheten}}{\leq} |\bar{x} + \bar{y}| + |\bar{y}|$$

Symmetri ger även $|\bar{y}| \leq |\bar{x} + \bar{y}| + |\bar{x}|$.

Alltså $\pm(|\bar{x}| - |\bar{y}|) \leq |\bar{x} + \bar{y}|$

vilket ger $\big| |\bar{x}| - |\bar{y}| \big| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$. ∎

<u>Sats:</u> Låt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, då gäller

$$|x_k| \underset{1}{\leq} |\bar{x}| \underset{2}{\leq} |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad , \quad 1 \leq k \leq n.$$

<u>Bevis:</u>

1. $|x_k|^2 = x_k^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = |\bar{x}|^2$

$\Leftrightarrow \quad |x_k| \leq |x|$.

2. Låt $\bar{e}_k = (0, 0, \dots, \underset{\text{plats } k.}{1}, \dots, 0)$

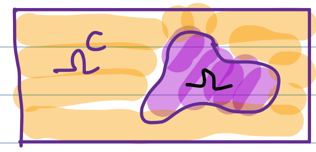
$$|x| = |x_1\bar{e}_1 + (x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n)| \leq |x_1\bar{e}_1| + |(x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n)|$$

$$= |x_1| + |x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n| \leq \dots \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Mängder i $\mathbb{R}^n$:

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Komplementet till Ω betecknas

$\Omega^c = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin \Omega\}$.



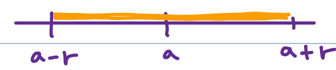
Definition: Ett öppet klot i $\mathbb{R}^n$ centrerat i $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ med radien $r > 0$ ges av

$$B_r(\bar{a}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \bar{a}| < r\}.$$

Ex: $n = 1$:

$$|x - a| < r \iff -r < x - a < r$$

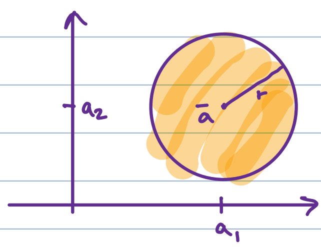
$$\iff a - r < x < a + r$$

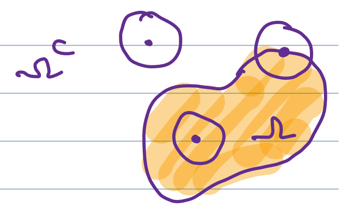


$n = 2$:

$$|\bar{x} - \bar{a}| < r \iff \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r$$

$$\iff (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$$





Definition: Låt $\Omega \in \mathbb{R}^n$, en punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ kallas

a) en inre punkt till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(\bar{a})$ sådant att $B_r(\bar{a}) \subset \Omega$.

b) en yttre punkt till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(\bar{a})$ sådant att $B_r(\bar{a}) \subset \Omega^c$.
(om $\bar{a}$ är en inre punkt till Ω^c).

c) en randpunkt till Ω om det för varje öppet klot $B_r(\bar{a})$ finns punkter från både Ω och Ω^c.

$\partial\Omega := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x}$ är en randpunkt till $\Omega\}$.

kallas <u>randen</u> till Ω.

<u>Definition:</u> En mängd $\Omega \in \mathbb{R}^n$ kallas

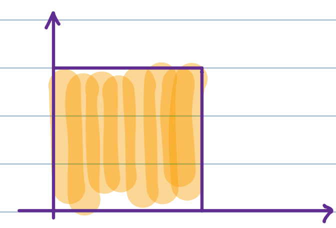
a) <u>öppen</u> om varje punkt i Ω är en inre punkt.

b) <u>sluten</u> om $\partial\Omega \subset \Omega$.

<u>Ex:</u> Ett öppet klot är en öppen mängd.

<u>Ex:</u> $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y < 1\}$

Ω är varken öppen eller sluten.

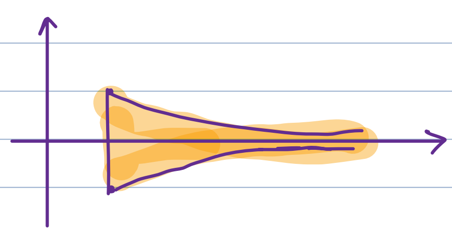


<u>Ex:</u> $\mathbb{R}^n$ är både en öppen och sluten mängd.

<u>Definition:</u> En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kallas <u>begränsad</u> om det finns ett öppet klot $B_R(0)$ sådant att $\Omega \subset B_R(0)$.

Ω kallas <u>kompakt</u> om Ω är både sluten och begränsad.

<u>Ex:</u> $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ |y| < \frac{1}{x}\}$.



Ω är öppen, ej begränsad

ej kompakt.