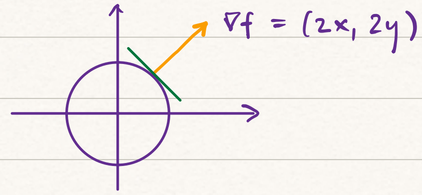
F9 Implicita funktioner

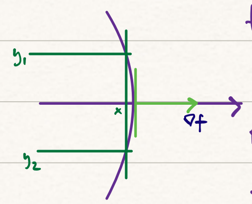
Låt oss studera cirkeln genom nivåkurvan

$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1$



Vi har problem globalt att lösa ut y som funktion av x.

$y = \sqrt{1-x^2}$ eller $y = -\sqrt{1-x^2}$



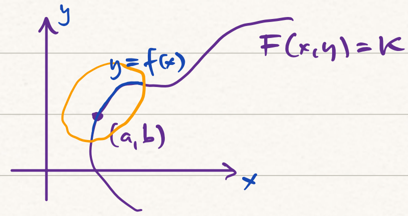
För x nära $(1,0)$ finns två lösningar y_1, y_2.

Men vi kan lösa ut x som funktion av y lokalt.

Sats: (Implicita funktionssatsen) $(d=2)$.

Låt $F \in C^k(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $(a,b) \in D$ vara en punkt på nivåkurvan $F(x,y) = K$, dvs $(a,b) \in \{(x,y) \in D : F(x,y) = K\}$. Om $F'_y(a,b) \neq 0$ så finns en omgivning U kring (a,b) sådan att restriktionen av F till nivåkurvan definierar en C^k-funktion $y = f(x)$.

och
$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$



Ex: $F(x,y) = x^2+y^2 = 2$, kring $(1,1)$

$y = \sqrt{2-x^2}$ $\quad y'(x) = \dfrac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$, $y'(1) = -1$.

Genom implicita funktionssatsen:

$(\nabla F)(x,y) = (2x,2y)$, $\quad (\nabla F)(1,1) = (2,2)$.

Alltså finns $y=f(x)$ kring $(1,1)$ med

$$y' = f'(x) = \frac{-F'_x(1,1)}{F'_y(1,1)} = \underline{\underline{-1}}.$$

Bevis: Antag att vi lyckats visa existens av $y=f(x)$ kring (a,b) med $f\in C^1$.

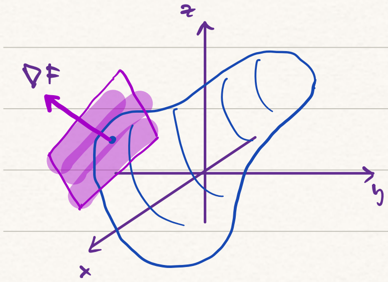
$$F(x,y) = K \iff F(x,f(x)) = K.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F(x,f(x))\right) = 0 \Rightarrow F'_1(x,f(x))\cdot 1 + F'_2(x,f(x))\cdot f'(x) = 0$$

Alltså är $f'(x) = \dfrac{-F'_1(x,f(x))}{F'_2(x,f(x))}$ ■

Notera att satsen inte är om och endast om.

Dimension $d=3$



$$F(x,y,z)=k$$

$$n=\nabla F$$

Tangentplanet ges av

$$n\cdot(x-a,y-b,z-c)=0$$

$$F'_x(a,b,c)(x-a)+F'_y(a,b,c)(y-b)+F'_z(a,b,c)(z-c)=0$$

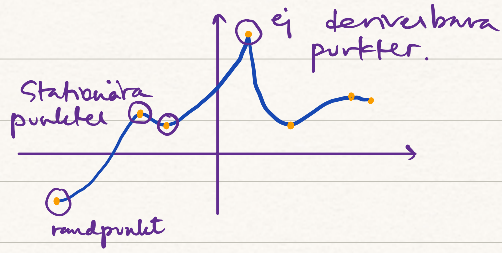
Notera att om $F'_x(a,b,c)\neq 0$ kan vi lösa ut $x=x(y,z)$.

Optimering på kompakta mängder

Låt K vara en kompakt mängd (sluten & begränsad) och låt $f: K\to\mathbb{R}$ vara kontinuerlig.

Enligt tidigare sats har f ett största och minsta värde på K. Var?

Ex: $d=1$



Vi vet från tidigare sats att om f har ett extremvärde i a och f är partiellt deriverbar i a så gäller $(\nabla f)(a)=0$

Alltså max och min för f kan endast finnas på följande ställen:

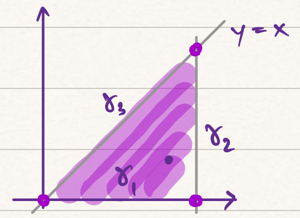
- Stationära punkter
- Ej deriverbara punkter
- Randpunkter (kurvor och hörn)

Ex: Bestäm det största och minsta värde

$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-2x-y}$ antar i mängden

$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le 1\}$.

Lösning: K :



Stationära punkter: $\begin{cases} f'_x = 2xe^{-2x-y} + (x^2+y^2)e^{-2x-y}\cdot(-2) = 0 \\ f'_y = 2ye^{-2x-y} + (x^2+y^2)e^{-2x-y}(-1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ 2y - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ $\quad (2) - \frac{1}{2}(1):\ 2y - x = 0 \Leftrightarrow x = 2y.$

insatt i (2): $2y - 5y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ eller $y = \frac{2}{5}$.

$5y\left(\frac{2}{5} - y\right) = 0$

Alltså är $\underbrace{y=0,\ x=0}_{\text{randpunkt}}$ eller $y = \frac{2}{5},\ x = \frac{4}{5}$.

$f\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right) = \left(\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)e^{-\frac{8}{5}-\frac{2}{5}} = \frac{e^{-2}}{25}(16+4) = \underline{\underline{\frac{e^{-2}}{5}}}$

Ej deriverbara punkter: saknas.

Randen:

Hörn: $f(0,0) = \underline{\underline{0}}$, $f(1,1) = \underline{\underline{2e^{-3}}}$, $f(1,0) = \underline{\underline{e^{-2}}}$

Kanterna:

γ_1: $x = t, y = 0$, $0 \le t \le 1$.

$\varphi_1(t) := f(t,0) = t^2 e^{-2t}$

Behöver endast kolla stationära punkter

$\varphi_1'(t) = 2te^{-2t} - 2t^2e^{-2t} = 2te^{-2t}(1-t) = 0 \iff t = 0$ eller $t = 1$

Ej inre punkter av randen.

γ_2: $x = 1$, $y = t$, $0 \le t \le 1$

$\varphi_2(t) := f(1,t) = (1+t^2)e^{-2-t}$

$\varphi_2'(t) = 2te^{-2-t} - (1+t^2)e^{-2-t} = 0 \iff t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$

inre stationära punkter saknas.

γ_3: $x = y = t$, $0 \le t \le 1$.

$\varphi_3(t) := f(t,t) = 2t^2 e^{-3t}$

$\varphi_3'(t) := 4te^{-3t} - 6t^2e^{-3t} = 0 \iff 2te^{-3t}(2-3t) = 0 \iff t = \frac{2}{3}$.

$\varphi_3\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{4}{9} e^{-2} = \frac{8e^{-2}}{9}$

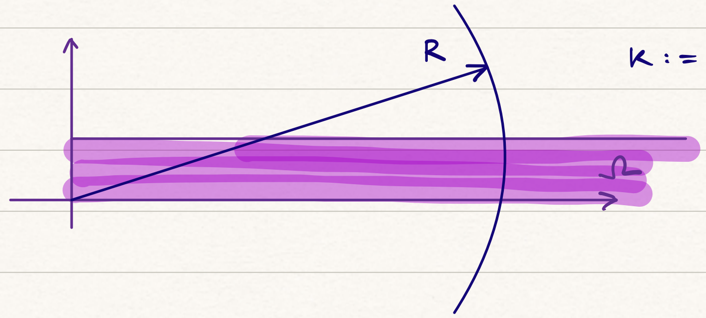
Kandidater: $\frac{e^{-2}}{5}$, 0, $2e^{-3}$, e^{-2}, $\frac{8e^{-2}}{9}$

Minsta värde $\min\limits_{(x,y)\in K} f(x,y) = 0$

Största värde $\max\limits_{(x,y)\in K} f(x,y) = \frac{1}{e^2}$

$\left(\frac{2}{e^3} = \frac{2}{e} \cdot \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e^2}\right)$

Optimering på icke-kompakta mängder.



$K := \Omega \cap B_R \quad , \quad M := \Omega \setminus B_R$

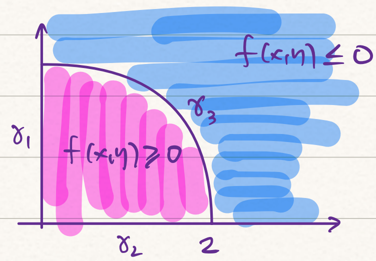
Idé: Optimera $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Kolla på $f : K \to \mathbb{R}$ Här är K kompakt så max och min existerar.

Kontrollera $f : M \to \mathbb{R}$.

Ex: Låt $f(x,y) = xy(4-x^2-y^2)$. Avgör om f har ett största och minsta värde i $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Beräkna i så fall dessa.

Lösning: Notera att om $x^2+y^2 < 4$ är $f(x,y) \geq 0$ och om $x^2+y^2 > 4$ är $f(x,y) < 0$.



$K = \{(x,y) \in \Omega : x^2+y^2 \leq 4\}$.

Funktionens maxvärde finner vi i K.

Hörn: $f(0,0) = f(4,0) = f(0,4) = 0$

Kanter: γ_1: $f(0,t)=0$, $0 \le t \le 4$

γ_2: $f(t,0)=0$, $0 \le t \le 4$

γ_3: $f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 0$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Stationära punkten: $f'_x = y(4-x^2-y^2) + xy(-2x)$

$$= y(4-3x^2-y^2)$$

$$f'_y = x(4-x^2-3y^2)$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4-3x^2-y^2=0 & (1) \\ 4-x^2-3y^2=0 & (2) \end{cases}$$

(1)−3(2): $4-12-y^2+9y^2=0 \iff 8y^2=8 \iff y=1$

Punkten $(1,1)$ är den enda stationära punkten.

$f(1,1) = 4-1-1 = \underline{\underline{2}}$ vilket är funktionens största värde

Studera nu f på $M = \{(x,y) \in \Omega : x^2+y^2 \geq 4\}$.

Låt $x=y=t$,

$\varphi(t) := f(t,t) = t^2(4-2t^2) = -2t^4+4t^2 \longrightarrow -\infty$, då $t \to \infty$.

Alltså kan f inte ha ett minsta värde.

Ex: Låt $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$. Bestäm största och minsta värde för f i $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Lösning: Låt $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$f(x,y) = g(r,\theta)$ på $\Omega_g = \{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \}$.

Bilda $\varphi_r(\theta) = g(r,\theta) = \dfrac{r\cos\theta}{1+r^2}$.

$$\frac{r\cos\frac{\pi}{2}}{1+r^2} = 0 \leq \varphi_r(\theta) \leq \frac{r}{1+r^2} = \frac{r\cos 0}{1+r^2}$$

Alltså är minsta värdet på f $\underline{\underline{0}}$.

Största värdet ges av $\displaystyle\max_{r \geq 0} \frac{r}{1+r^2}$

Bilda $h(r) = \dfrac{r}{1+r^2}$ $\qquad h(0) = \displaystyle\lim_{r\to\infty} h(r) = 0$

$$h'(r) = \frac{1+r^2-2r^2}{(1+r^2)^2} = \frac{(1+r)(1-r)}{(1+r^2)^2} = 0 \iff r = 1.$$

$$f(1,0) = g(1,0) = h(1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Minsta värde 0 och största varde $\frac{1}{2}$.