

F8 Funktionalmatriser & Funktordeterminanter

(jacobimatriser / jacobian)

definition: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$ är öppen,
 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$, $x \in D$.

Vi säger att f är differentierbar om
 f_j är differentierbar, $1 \leq j \leq p$.

Om f är differentierbar så gäller

$$f(a+h) - f(a) = \begin{pmatrix} f_1(a+h) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a+h) - f_p(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)h_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a)h_n \end{pmatrix} + |h| \underbrace{\begin{pmatrix} g_1(h) \\ \vdots \\ g_p(h) \end{pmatrix}}_{g(h):=}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}}_{\substack{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p) \\ \partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}} \cdot h + |h|g(h)$$

$$\approx: \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = f'(a) \quad \text{kallas för funktionalmatrisen för } f.$$

Ex: Bestäm funktionalmatrisen för polärt koordinatbyte

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Linjärisering:

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + f'(a)h}_{\text{approximation}} + \underbrace{|h|g(h)}_{\text{felel}}$$

Ex: Bestäm funktionalmatrisen för en linjär avbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

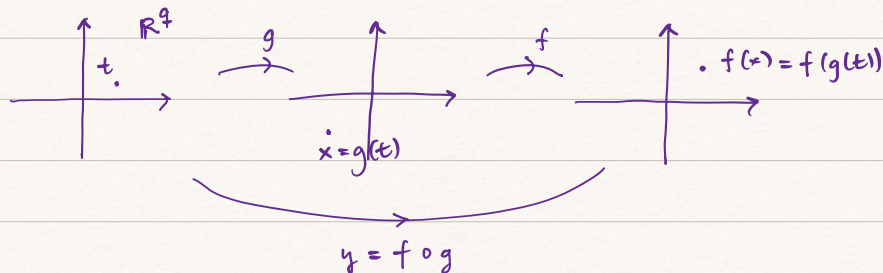
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax$$

$$f(a+h) = A(a+h) = Aa + Ah = f(a) + Ah + 0$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

För en linjär avbildningen är felet 0.

Kedjeregeln: Betrakta $t \in \mathbb{R}^q$, $x = g(t) \in \mathbb{R}^n$ och $y(t) = f(g(t)) \in \mathbb{R}^p$



Sats: $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$.

Beris: På rad i och kolonn j i $(f \circ g)'(t)$ finns

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_j} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{rad } i \text{ i } f'(x) \\ \text{kolonn } j \text{ i } g'(t) \end{matrix}$$

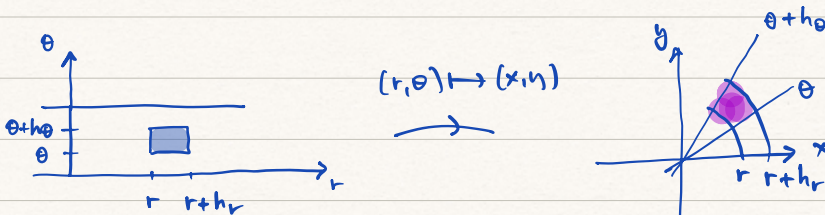
Funktionaldeterminanten:

Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (dvs $p=n$), då blir funktionsmatrisen kvadratisk. I detta fall kan vi bestämma funktionaldeterminanten av f .

$$\det(f'(a)) = \frac{d(f_1, f_2, \dots, f_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Ex: Polärt koordinatbyte

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$



$$A_{\text{Före}} = h_\theta \cdot h_r$$

$$A_{\text{Efter}} = \left(\pi (r+h_r)^2 - \pi r^2 \right) \cdot \frac{h_\theta}{2\pi} = \frac{h_\theta}{2} (r^2 + 2rh_r + h_r^2 - r^2)$$

$$= rh_\theta h_r + \frac{h_r^2 h_\theta}{2}$$

$$\frac{A_{\text{Efter}}}{A_{\text{Före}}} = \frac{rh_\theta h_r + \frac{h_r^2 h_\theta}{2}}{h_\theta h_r} = r + \frac{h_r}{2} \rightarrow r, \text{ då } (h_r, h_\theta) \rightarrow 0.$$

Ex: Kylindriskt koordinatbyte

$$\begin{cases} x(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi \sin \theta \\ y(r, \theta, \varphi) = r \sin \varphi \sin \theta \\ z(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \end{cases}, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Funktionalmatrisen

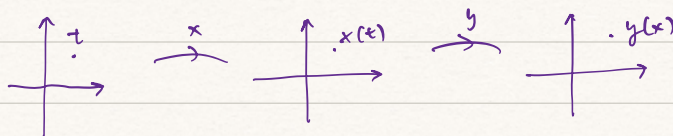
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} = \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \underbrace{\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}}_{=1} + r^2 \sin^3 \theta \underbrace{\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}}_{=1}$$

$$= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \underline{\underline{r^2 \sin \theta}}.$$

Sats: Låt $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$



Det gäller att $\frac{d(y \circ x)}{d(t)} = \frac{d(y)}{d(x)} \cdot \frac{d(x)}{d(t)}$

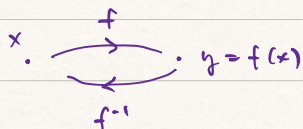
(Allt är funktionaldeterminanter)

Beris: Kedjeregeln för funktionalmatriser

$$(y \circ x)' = y' \cdot x'$$

$$\det((y \circ x)') = \det(y' \cdot x') = \det(y') \cdot \det(x'). \quad \blacksquare$$

Ex: Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är bijektiv (inverterbar)



↙ identitets avbildningen
 $I \cdot x = (f^{-1} \circ f)(x)$

$$1 = \det((f^{-1} \circ f)') = \det((f^{-1})') \cdot \det(f')$$

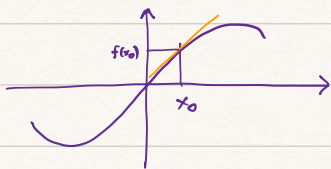
eller

$$1 = \frac{d(y)}{d(x)} \cdot \frac{d(x)}{d(y)} \iff \frac{d(y)}{d(x)} = \frac{1}{\frac{d(x)}{d(y)}}$$

Notera att för matriser gäller $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Inversa funktionssatsen:

Ex:



Om $f'(x_0) \neq 0$ finns ett öppet intervall I_0 kring $f(x_0)$ och ett öppet intervall I_1 kring x_0 så att $f: I_1 \rightarrow I_0$ är bijektiv.

Sats (Inversa funktionssatsen):

Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ öppen, $f \in C^1(D)$, $a \in D$.

Om $\det(f'(a)) \neq 0$ så finns omgivning U kring a och V kring $f(a)$ sådana att $f: U \rightarrow V$ är bijektiv och inversen $f^{-1}: V \rightarrow U$ är C^1 .

