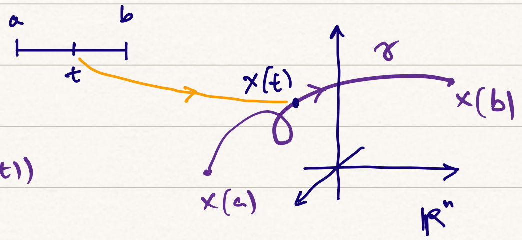
F7 Kurvor och ytor

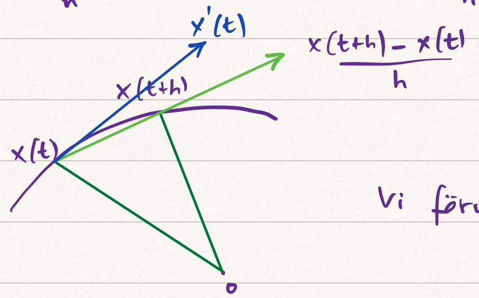
$x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$



Derivata: $$x'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, \dots, \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \right) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$



Vi förutsätter $x'(t) \neq 0$.

Ex: Linje $x = tv + p$, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$x'(t) = v$ Linjens riktningsvektor.

En parametrisering av en kurva γ är inte unik.

$\gamma = \{ x(t),\ a \leq t \leq b \} = \{ y(s),\ \alpha \leq s \leq \beta \}$.

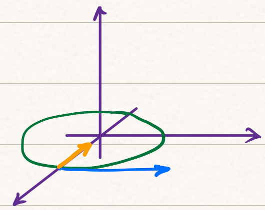
Det finns en unik avbildning $s = \varphi(t)$ sådan att $x(t) = y(s)$, dvs $x(t) = y(\varphi(t))$

Derivatans riktning i en punkt på kurvan är oberoende av parametriseringen ty

$$\underset{\in \mathbb{R}^n}{x'(t)} = \frac{d}{dt}(x(t)) = \frac{d}{dt}(y(s)) = \frac{d}{ds}y(s)\cdot\frac{ds}{dt} = \underset{\in \mathbb{R}^n}{y'(s)}\cdot\underset{\substack{>0\\ \in\mathbb{R}}}{\varphi'(t)}$$

Linjen $T(t) = x'(t_0)t + x(t_0)$ kallas tangenten till γ i punkten $x(t_0)$.

Ex: (Centralrörelse) $a, b, k > 0$



Position:

$r(t) = (a\cos(kt), b\sin(kt), 0)$

Hastighet:

$r'(t) = (-ka\sin(kt), bk\cos(kt), 0)$

Acceleration:

$r''(t) = (-k^2 a\cos(kt), -bk^2\sin(kt), 0) = -k^2 r(t)$

$r(0) = (a, 0, 0)$, $r'(0) = (0, bk, 0)$, $r''(0) = (-k^2 a, 0, 0)$.

Längden av en kurva.

Låt $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ och $y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ vara parametriseringar av kurvan γ.

Låt $s = \varphi(t)$, φ växande, $\varphi : [a,b] \to [\alpha, \beta]$.

$\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ sådan att $y(s) = y(\varphi(t)) = x(t)$.

Studera
$$\int_a^b |x'(t)|\,dt = \int_a^b \left|\frac{d}{dt}(y(\varphi(t)))\right| dt = \int_a^b |y'(\varphi(t))|\cdot\varphi'(t)\,dt$$
$$= \left\{\begin{matrix} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t)dt \end{matrix}\right\} = \int_\alpha^\beta |y'(s)|\,ds.$$

Talet $L_\gamma = \int_a^b |x'(t)|\,dt$ är oberoende av parametriseringen.
Beror av γ.

Givet parametriseringen $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ låt
$s = \varphi(t) = \int_a^t |x'(u)|\,du$ vara en ny parameter.

$\alpha = \varphi(a) = 0$, $\beta = \varphi(b) = \int_a^b |x'(u)|\,du = L_\gamma$, $y(s) = y(\varphi(t)) = x(t)$.

Från analysens huvudsats är $\varphi'(t) = |x'(t)|$.

$$L_\gamma = \int_a^b |x'(t)|\,dt = \int_0^{L_\gamma} |y'(s)|\,ds$$

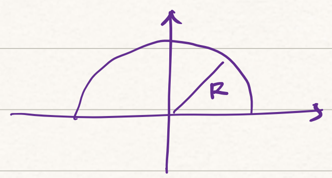
Men $$|x'(t)| = \left|\frac{d}{dt}(x(t))\right| = \left|\frac{d}{dt}(y(\varphi(t)))\right|$$

$$= |y'(\varphi(t)) \cdot \underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{R}}}{\varphi'(t)}| = |y'(s)| \cdot |\varphi'(t)| = |y'(s)| \cdot |x'(t)|$$

Alltså är $|y'(s)| = 1$. och $L_\gamma = \int_0^{L_\gamma} ds =: \int_\gamma ds$

ds kallas **bågelementet**. L_γ kallas **längden** av γ.

Ex: Beräkna längden av en halvcirkel.



$x(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$.

$$L_\gamma = \int_\gamma ds = \int_0^\pi |x'(\theta)|\,d\theta = \int_0^\pi |(-R\sin\theta, R\cos\theta)|\,d\theta = \int_0^\pi \sqrt{R^2}\,d\theta = \underline{\underline{R\pi}}$$

Räkneregler: • $\frac{d}{dt}(c \cdot x(t)) = c \cdot x'(t)$

• $\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = x'(t) + y'(t)$

skalärprodukt

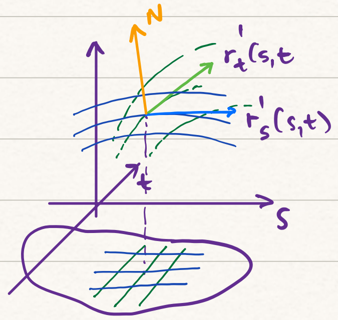
• $\frac{d}{dt}(x(t) \cdot y(t)) = x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t)$

(i $d=3$) • $\frac{d}{dt}(x(t) \times y(t)) = x'(t) \times y(t) + x(t) \times y'(t)$

Ytor: $r : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$

$$r(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), x_3(s,t))$$

För fixt s är $\varphi(t) := r(s,t)$ en kurva och
för fixt t är $\psi(s) := r(s,t)$ en kurva



Om r'_s och r'_t inte är linjärt beroende så spänner de upp ett plan med normalvektor

$$N(s,t) = r'_s(s,t) \times r'_t(s,t) .$$

Ex: En parametrisering av sfären är

$$r(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi) \qquad 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi$$

$$r'_\theta = (-R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

$$r'_\varphi = (R\cos\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\cos\varphi,\ -R\sin\varphi)$$

$$N = r'_\theta \times r'_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & -R\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= R^2\left(-\cos\theta\sin^2\varphi,\ -\sin\theta\sin^2\varphi,\ \underbrace{-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}_{-\sin\varphi\cos\varphi}\right)$$

$$= R^2\sin\varphi\left(-\cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta\sin\varphi,\ -\cos\varphi\right) = -R\sin\varphi\ r(\theta,\varphi).$$

Ex: Funktionsyta.

$z = f(x,y)$. $\qquad r(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$$N = r'_x \times r'_y = (1, 0, f'_x) \times (0, 1, f'_y)$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

$N = (-f'_x, -f'_y, 1)$.