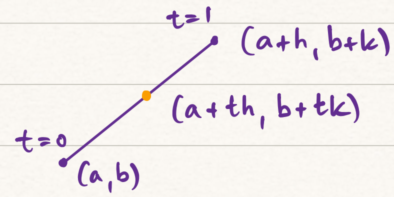
F6 - Taylors formel, lokala extrempunkter

Låt $f \in C^3(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in D$.

Bilda $\varphi(t) := f(a+th, b+tk)$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Vi kan nyttja Taylors formel för φ.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot t + \frac{\varphi''(0)t^2}{2} + \varphi'''\frac{(\theta t)t^3}{3!} \quad \text{för något } \theta \in [0,1]$$

Låt oss överföra denna formel till f.

$$\varphi(0) = f(a,b)$$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(\varphi(t)) = \frac{d}{dt}\left(f(a+th, b+tk)\right)$$

$$= f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$$

$$\varphi'(0) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}(\varphi'(t)) = \frac{d}{dt}\left(f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k\right)$$

$$= f''_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + 2f''_{xy}(a+th, b+tk)hk + f''_{yy}(a+th, b+tk)k^2$$

$$\varphi''(0) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$$

$$\varphi'''(t) = f'''_{xxx}(a+th, b+tk)h^3 + 3f'''_{xxy}(a+th, b+tk)h^2k + 3f'''_{xyy}(a+th, b+tk)hk^2$$
$$+ f'''_{yyy}(a+th, b+tk)k^3.$$

Alltså

$$f(a+th, b+tk) = f(a,b) + \left(f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k\right)t$$
$$+ \left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)h\cdot k + f''_{yy}(a,b)k^2\right)\frac{t^2}{2} + \varphi'''(\theta t)\frac{t^3}{3!}$$

Speciellt för $t=1$:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right) + \frac{\varphi'''(\theta)}{3!}, \quad \theta \in [0,1]$$

Låt oss studera feltermen $\frac{\varphi'''(\theta)}{3!}$

Bilda $B(h,k) := \frac{\varphi'''(\theta)}{3!\cdot|(h,k)|^3}$

Notera att $\left|f'''_{xxy}(a+\theta h, b+\theta k)\, h^2 k\right| \leq |f'''_{xxy}(a+\theta h, b+\theta k)|\cdot|(h,k)|^3$

eftersom $|h| \leq |(h,k)|$ och $|k| \leq |(h,k)|$.

Då $f \in C^3(D)$ är $|f'''_{\dots}|$ begränsad.

Alltså $|B(h,k)| \leq C$ i en omgivning av $(0,0)$.

Sats: (Taylors formel av ordning 2, d=2)

Låt $f \in C^3(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $(a,b) \in D$. Då gäller

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right)$$
$$+ B(h,k)\cdot|(h,k)|^3$$

där B är begränsad i en omgivning av origo.

Ex: Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $(\frac{\pi}{2}, 1)$ till funktionen $f(x,y) = \frac{\sin x}{y}$.

$f'_x = \frac{\cos x}{y}$ $\quad f'_x(\frac{\pi}{2}, 1) = 0$ $\quad f(\frac{\pi}{2}, 1) = 1$

$f'_y = -\frac{\sin x}{y^2}$ $\quad f'_y(\frac{\pi}{2}, 1) = -1$.

$f''_{xx} = -\frac{\sin x}{y}$ $\quad f''_{xx}(\frac{\pi}{2}, 1) = -1$

$f''_{xy} = -\frac{\cos x}{y^2}$ $\quad f''_{xy}(\frac{\pi}{2}, 1) = 0$

$f''_{yy} = 2\frac{\sin x}{y^3}$ $\quad f''_{xy}(\frac{\pi}{2}, 1) = 2$.

$$T(\tfrac{\pi}{2}+h, 1+k) = 1 + (0 \cdot h - k) + \frac{1}{2}(-h^2 + 2k^2)$$
$$= 1 - k + k^2 - \frac{h^2}{2}.$$

$x = \frac{\pi}{2} + h$, $y = 1+k$

$$T(x,y) = 1 - (y-1) + (y-1)^2 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2}$$

Definition: Låt $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att f har ett lokalt maximum i $a \in D$ om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(x) \leq f(a)$, för varje $x \in D$ som uppfyller $|x-a| < \delta$.
a kallas lokal maxpunkt.

Lokala max- och minpunkter kallas lokala extrempunkter

Sats: Om $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt $a \in D$ och om f är partiellt deriverbar i a så följer att $(\nabla f)(a) = 0$.

Bevis: Bilda $\varphi(t) := f(a_1 + t, a_2, \dots, a_n)$

Eftersom f har ett extremvärde i a så gäller att φ har ett extremvärde i $t = 0$.

Från envariabelanalys är $\varphi'(0) = 0$.

$\Leftrightarrow f_1'(a) = 0$.

Alltså är $(\nabla f)(a) = 0$ från symmetri.

Definition: Låt $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Om $(\nabla f)(a) = 0$ kallas $a \in D$ en stationär punkt.

I en omgivning av en stationär punkt gäller

$$f(a+h) = f(a) + 0 + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{f_{11}''(a)h_1^2 + 2f_{12}''(a)h_1h_2 + f_{22}''(a)h_2^2}_{\text{avgör karaktären.}}\Big) + |h|^3 B(h)$$

$Q(h) := Ah_1^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2^2$. Kvadratisk form.

Om $Q(h) > 0$, då $h \neq 0$ så har f ett lokalt minimum.

Om $Q(h) < 0$, då $h \neq 0$ så har f ett lokalt maximum.

Ex: Bestäm extrempunkter för $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$

Stationära punkter: $\begin{cases} f'_x = \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ f'_y = -\frac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8y = x^2 \\ x = -y^2 \end{cases}$

(2) insatt i (1): $8y - y^4 = y(8-y^3) = 0$

$= y(2-y)(y^2+2y+4) = 0$

$\longrightarrow$ $y = 0$ eller $y = 2$

Stationära punkter är endast $(-4,2)$

Punkten $(-4,2)$:

$Q(h,k) = f''_{xx}(-4,2)h^2 + 2f''_{xy}(-4,2)hk + f''_{yy}(-4,2)k^2$

$f''_{xx} = \frac{16}{x^3}$ $\qquad f''_{yy} = \frac{2x}{y^3}$ $\qquad f''_{xy} = -\frac{1}{y^2}$

$Q(h,k) = -\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{2}hk - k^2$

$= -\frac{1}{4}(h^2 + 2hk + 4k^2) = -\frac{1}{4}((h+k)^2 + 3k^2) < 0$

$, \forall (h,k) \neq (0,0)$

Alltså $(-4,2)$ lokalt max.