F5 Gradient och riktningsderivata

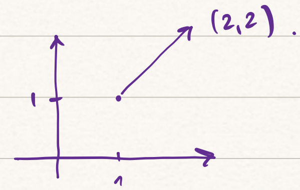
Definition: Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara partiellt deriverbar.
Vi definierar gradienten av f i punkten x som

$$(\nabla f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Notera att $(\nabla f)(x) \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Ex: Bestäm ∇f då $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

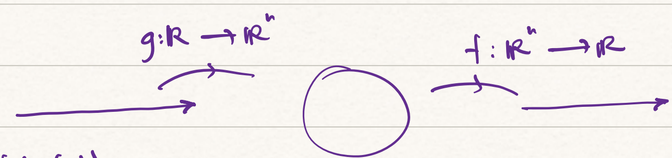
$$(\nabla f)(x,y) = (2x, 2y)$$



Notera att om f är differentierbar i a så gäller

$$f(a+h) - f(a) = (\nabla f)(a) \cdot h + |h| \rho(h), \quad \text{där } \rho(h) \to 0, \text{ då } h \to 0.$$

Kedjeregeln:



$$t \mapsto f(g(t)).$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(g(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t} = (\nabla f)(g(t)) \cdot g'(t).$$

$$x_j(t) = g_j(t), \quad g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), \ldots, g_n'(t)).$$

Sats: Låt $D \subset \mathbb{R}^n$, vara öppen, bågvis sammanhängande mängd och $f \in C^1(D)$. Om $(\nabla f)(x) = 0$, $\forall x \in D$ så är f konstant i D.

Bevis: Låt $a, b \in D$. Eftersom D är bågvis sammanhängande kan vi finna en kurva $x : [0,1] \to D$ sådan att $x(0) = a$ och $x(1) = b$. x kan väljas styckvis deriverbar.

$$\frac{d}{dt}\big(f(x(t))\big) = (\nabla f)(x(t)) \cdot x'(t) = 0 \cdot x'(t) = 0.$$

Eftersom $t \mapsto f(x(t))$ är kontinuerlig i ändpunkterna så är $f(x(t)) = \text{konstant} = f(a) = f(b)$. ∎

Riktningsderivata:

Definition: Med derivatan av $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i punkten a med avseende på riktningen $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ menas gränsvärdet

$$f'_v(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Ex: $f(x,y) = x^2 + xy$, bestäm riktningsderivatan i $(1,1)$ i riktningen $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Lösning: $|v| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1^2 + 2^2} = 1$.

$$\frac{1}{t}\left(f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - f(1,1)\right) = \frac{1}{t}\left(\left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - 2\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{5}} + \frac{t^2}{5} + 1 + \frac{3t}{\sqrt{5}} + \frac{2t^2}{5} - 2\right) = \frac{1}{t}\left(\sqrt{5}t + \frac{3t^2}{5}\right) = \sqrt{5} + \frac{3t}{5} \to \sqrt{5} \text{ då } t \to 0.$$

Sats: Om f är differentierbar och v en enhetsvektor så är

$$f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v .$$

Bevis: Låt $g(t) = a + tv$

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t}$$

Alltså är $f'_v(a) = \frac{d}{dt}\Big(f(g(t))\Big)\Big|_{t=0} = (\nabla f)(g(0)) \cdot g'(0)$

$$= (\nabla f)(a) \cdot v . \qquad \blacksquare$$

Sats: Gradienten $(\nabla f)(a)$ pekar i den riktning i vilken f växer snabbast i punkten a. Den maximala tillväxten är $|(\nabla f)(a)|$.

Cauchy–Schwarz olikhet.

Bevis: $f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v \leq |(\nabla f)(a)| \cdot |v| = |(\nabla f)(a)|$.

Likhet gäller då $(\nabla f)(a)$ och v pekar i samma riktning,

v är då $v = \dfrac{(\nabla f)(a)}{|(\nabla f)(a)|}$.

Ex: Temperaturen i en punkt (x,y) ges av $T(x,y) = x^2 e^{-y}$. I vilken riktning i punkten $(2,1)$ ökar temperaturen mest? Hur mycket ökar den?

Lösning:

$$(\nabla T)(x,y) = \left(2xe^{-y}, -x^2e^{-y}\right)$$

$$(\nabla T)(2,1) = \left(4e^{-1}, -4e^{-1}\right) = \frac{4}{e}(1,-1).$$

Temperaturen ökar mest i riktningen $(1,-1)$.

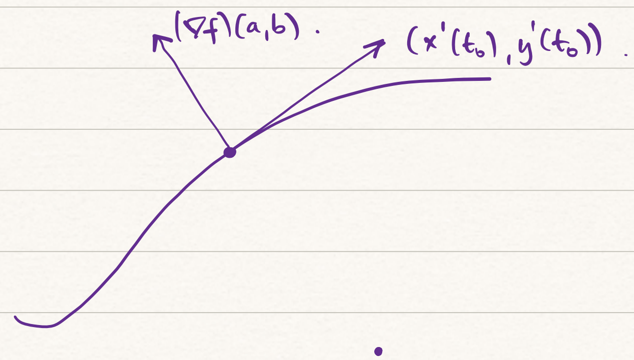
Ökningen $|(\nabla T)(2,1)| = \frac{4}{e}\sqrt{2}$.

Nivåkurvor och gradienten:

Låt $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Studera nivåkurvan $f(x,y) = C$, dvs $\Omega = \{(x,y) \in D : f(x,y) = C\}$.

Låt $(a,b) \in \Omega$ och låt $t \mapsto (x(t), y(t))$ vara en parametrisering i en omgivning av (a,b) med $(x(t_0), y(t_0)) = (a,b)$.



Kedjeregeln ger:

$$\frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = (\nabla f)(x(t), y(t)) \cdot \left(x'(t), y'(t)\right) = 0$$

För $t = t_0$ får vi $(\nabla f)(a,b) \cdot \left(x'(t_0), y'(t_0)\right) = 0$.