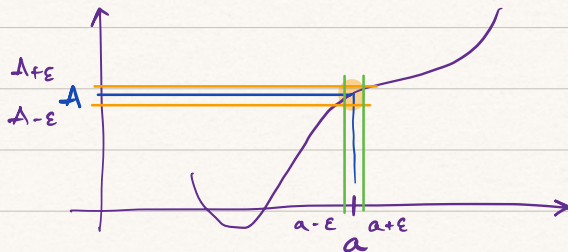


## 2 Gränsvärden:

d=1: Låt  $f$  vara en reellvärd funktion,  $D_f \subset \mathbb{R}$  sådan att varje punkterad omgivning till  $x=a$  innehåller punkter i  $D_f$ . Vi säger att  $f$  konvergerar mot  $A \in \mathbb{R}$  då  $x$  går mot  $a$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  existerar ett  $\delta > 0$  sådant att

$|f(x) - A| < \varepsilon$  för varje  $x \in D_f$  som uppfyller att  $0 < |x - a| < \delta$ .



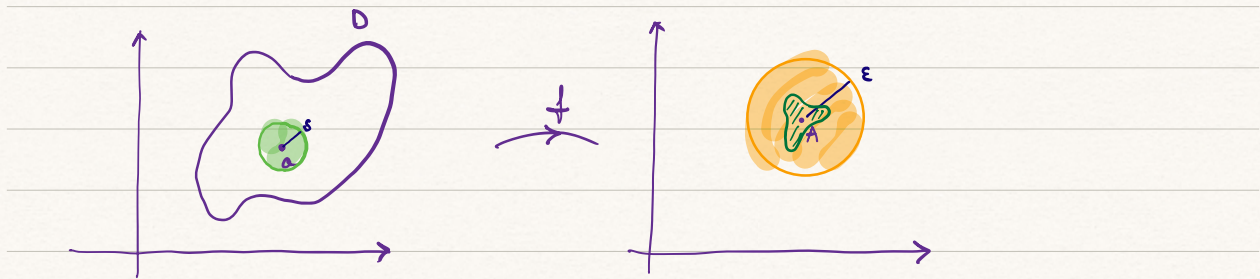
Din  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \vdots \\ y_p = f_p(x) \end{cases} \quad \text{där } f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

I här algebra är  $f$  en matris.

Definition Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Låt  $a \in \bar{D} = D \cup \partial D$ .

Vi säger att  $f(x)$  konvergerar mot  $A \in \mathbb{R}^p$  då  $x$  går mot  $a$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  existerar ett  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x) - A| < \varepsilon$  för varje  $x \in D$  som uppfyller att  $0 < |x - a| < \delta$ .



Ex: Använd definitionen för att visa att  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (2x+y^2) = 13$

Lösning: Vi vill visa att för varje  $\epsilon > 0$  finns  $\delta > 0$  sådant att  $|2x+y^2-13| < \epsilon$  för varje  $0 < |(x,y) - (2,3)| < \delta$ .

Notera att  $0 < |(x,y) - (2,3)| < \delta$  betyder  $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} < \delta$ .

$$|2x+y^2-13| = |2x-4+y^2-9| \leq 2|x-2| + |y^2-9| = 2|x-2| + |y+3| \cdot |y-3|$$

om  $\delta < 1$ . (då är  $|y+3| < 4$ )

$$< 2|x-2| + 4 \cdot |y-3| = 2\sqrt{(x-2)^2} + 4\sqrt{(y-3)^2} \leq 6\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} < 6\delta.$$

$$6\delta \leq \epsilon \quad \text{då} \quad \delta \leq \frac{\epsilon}{6}. \quad \text{Välj därför } \delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{6}\right).$$

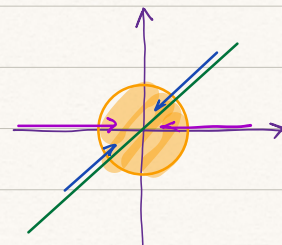
Ex: Visa att  $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$  saknar gränsvärde i  $(0,0)$ .

Lösning: Låt först  $x=t, y=0$  och låt  $t \rightarrow 0$ .

$$f(t,0) = \frac{2 \cdot t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0 \rightarrow 0, \text{ då } t \rightarrow 0.$$

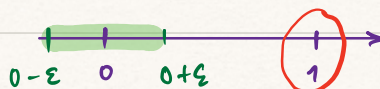
Låt nu  $x=y=t$  och låt  $t \rightarrow 0$ .

$$f(t,t) = \frac{2t^2}{2t^2} = 1 \rightarrow 1, \text{ då } t \rightarrow 0.$$





Skall  $A$  väljas till 0 eller 1? Omöjligt.



Sats: Låt  $f, g$  och  $h$  vara funktioner definierade på  $D \subset \mathbb{R}^n$  med värden i  $\mathbb{R}^p$ . Låt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$   
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Då gäller

i)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$ .

ii) Om  $p=1$ :  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

iii) Om  $p=1$ :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

om även  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$  existerar så gäller att

iv) om  $p=1$ :  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x$  i en omgivning av  $a$   
så gäller att  $A \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \leq B$ .

Basis: i) Låt  $\varepsilon > 0$ . Eftersom  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  och  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

finns det  $\delta_f > 0$  och  $\delta_g > 0$  sådana att

$$\begin{cases} |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ då } 0 < |x - a| < \delta_f \\ |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ då } 0 < |x - a| < \delta_g. \end{cases}$$

Antsän gäller att  $|f(x)+g(x)-A-B| \leq |f(x)-A| + |g(x)-B|$   
 $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  då  $0 < |x-a| < \min(\delta_f, \delta_g)$ .

■

Ex: Visa att  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ .

Lösning:  $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x^2 y|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{|x^2 + y^2| \cdot |y|}{|x^2 + y^2|} = |y| = \sqrt{y^2}$   
 $\leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ , då  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

Ex: (Jobbigt resultat)

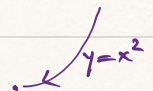
Betrakta  $f(x,y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ .



Bestäm  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  för alla  $(x,y)$  som uppfyller  
 att  $y=kx$ .

Låt  $x=t$ ,  $y=kt$ ,  $t \rightarrow 0$ .

$$f(t, kt) = \frac{2kt^3}{t^4 + k^2 t^2} = \frac{2kt}{t^2 + k^2} \rightarrow 0, \text{ då } t \rightarrow 0$$



Men  $f(t, t^2) = \frac{2t^4}{t^4 + t^4} = 1 \rightarrow 1, \text{ då } t \rightarrow 0$ .

Antsän saknar  $f(x)$  gränsvärde då  $x \rightarrow (0,0)$ .



Sats: Om  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  och  $|f(x) - A| \leq M(|x|) \rightarrow 0$   
då  $x \rightarrow 0$  så gäller att  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ .

Ex: Bestäm  $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}$ .  $\left| \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} = |r \cos \theta \sin \theta|$   
 $\leq |r| \rightarrow 0$ , då  $r \rightarrow 0$ . Alltså  $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = 0$ .

Definition: Vi säger att  $f(x) \rightarrow B$ , då  $|x| \rightarrow \infty$   
om det till varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\omega$  sådant  
 $|f(x) - B| < \varepsilon$ , för varje  $|x| > \omega$ .

Definition: Låt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Vi säger att  
 $f$  är kontinuerlig i  $x = a \in D$  om  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Sats: Om  $f$  är reellvärd, kontinuerlig funktion med  
kompakt definitionsmängd  $D_f$  så har  $f$  ett  
största och minsta värde på  $D_f$ .

En mängd  $L$  sägs vara bägris sammanhängande  
om det till varje par  $a, b \in L$  finns en kontinuerlig  
kurva  $t \mapsto x(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  sådan att  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$   
och  $x(t) \in L$ .



Satsen om mellanliggande värde:

Låt  $f$  vara en kontinuerlig reellvärd funktionsbegränsad sammanhängande mängd  $D$ . Om  $f$  antar värdena  $A$  och  $B$  så antar  $f$  alla värden mellan  $A$  och  $B$ .

Beris: Bilda  $t \mapsto f(x(t))$  och applicera  
envariabelanalys.