# F16 Kurvintegraler

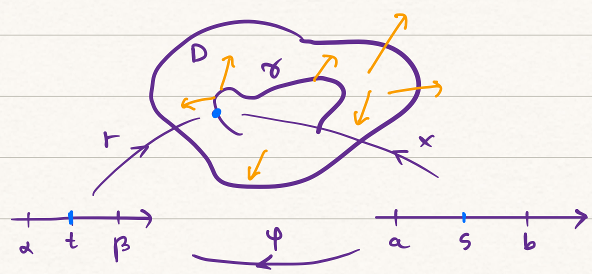
Låt $\gamma$ vara en orienterad kurva i $\mathbb{R}^2$ med parametriseringen $r = r(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.


Vi har sedan tidigare att längden av $\gamma$ ges av

$$L = \int_\gamma ds = \int_\alpha^\beta |r'(t)|\,dt$$ som är oberoende av parametriseringen.

**Vektorfält:** Låt $F: D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $\gamma \subset D$ vara en kurva med de bijektiva parametriseringarna $r:[\alpha,\beta] \to \gamma$ och $x:[a,b] \to \gamma$

**Sats:**
$$\int_\alpha^\beta F(r(t)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalärprodukt}}}{\cdot} r'(t)\,dt = \int_a^b F(x(s)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalärprodukt}}}{\cdot} x'(s)\,ds$$




**Bevis:** Låt $\varphi:[a,b] \to [\alpha,\beta]$ vara sådan att $\varphi(s) = t$ givet att $r(t) = x(s)$.

Från kedjeregeln $x'(s) = \frac{d}{ds}(x(s)) = \frac{d}{ds}(r(\varphi(s)))$

$$= \underbrace{r'(\varphi(s))}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{\varphi'(s)}_{\text{tal}}$$

Därmed är

$$HL = \int_a^b F(x(s)) \cdot x'(s)\, ds = \int_a^b F(r(\varphi(s))) \cdot r'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\, ds$$

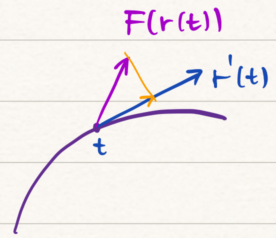
$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(s) \\ dt = \varphi'(s) ds \end{array} \right\} = \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = VL \qquad \blacksquare$$

Vi inför notationen $\int_\gamma F \cdot dr$ för kurvintegralen av $F$ över $\gamma$.

Alternativt om $F = (P, Q)$ och $dr = (dx, dy)$

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\gamma (P,Q) \cdot (dx, dy)$$

Notera:




Endast bidrag från den del av vektorfältet som går i kurvans riktning.

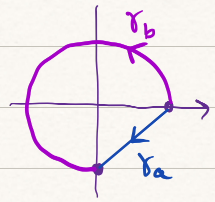
$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{r'(t)}{|r'(t)|}}}_{T} |r'(t)|\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot T(t)\, ds$$, där $ds = |r'(t)|dt$ är bågelementet

Ex: Låt $F(x,y) = (y,-x)$ från $(1,0)$ till $(0,-1)$

a) Längs en rät linje

b) Längs enhetscirkeln moturs




Lösning:

a) $r(t) = (1-t, -t)$, $0 \le t \le 1$

$F(r(t)) = F(1-t, -t) = (-t, t-1)$

$r'(t) = (-1,-1)$

$$\int_{\gamma_a} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_0^1 (-t, t-1)\cdot(-1,-1)\,dt = \int_0^1 (t - t + 1)\,dt = 1$$

b) $r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$.

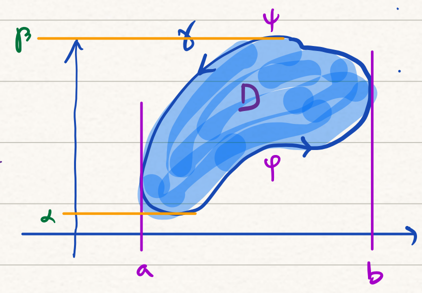
$$\int_{\gamma_b} F \cdot dr = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} F(r(\theta)) \cdot r'(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin\theta, -\cos\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = -\int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\theta = -\frac{3\pi}{2}.$$

Kurvintegraler beror av vägen. (ibland inte som vi kommer att se senare).

Greens formel: Låt $\varphi, \psi \in C^1([a,b])$ och låt

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ a \le x \le b\}$.




$\gamma = \partial D$ orienterad så att området är på vänster sida, vilket vi kallar positiv orientering.

Vi har att $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ där $\gamma_1 = \{(t, \varphi(t)) : a \le t \le b\}$

$\gamma_2 = \{(t, \psi(t)) : a \le t \le b\}$

Dela upp vektorfältet enligt $(P,Q) = (P,0) + (0,Q)$ och studera

$$\int_\gamma (P,0)\cdot dr = \int_{\gamma_1} (P,0)\cdot dr - \int_{\gamma_2} (P,0)\cdot dr =$$

$$= \int_a^b \left(P(t,\varphi(t)), 0\right)\cdot(1,\varphi'(t))\,dt - \int_a^b \left(P(t,\psi(t)),0\right)\cdot(1,\psi'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b \left(P(t,\varphi(t)) - P(t,\psi(t))\right)dt = -\int_a^b \left(P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\right)dx$$

$$= -\int_a^b \left[P(x,y)\right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = -\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx$$

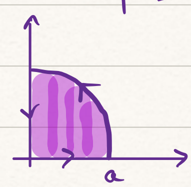
Analogt kan man visa att $\int_\gamma (0,Q)\cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$.

Greens formel: Låt $F = (P,Q)$ vara ett $C^1$-fält definierat på den kompakta mängden $D$ och låt $\gamma = \partial D$ vara en styckvis $C^1$-kurva med positiv orientering.
Då gäller att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Ex: Beräkna $I = \int_\gamma (x - y^3)\,dx + (y^3 + x^3)\,dy$, $\gamma = \partial D$ positivt orienterad

$D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \le a^2\}$



Lösning: Enligt Greens formel är

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad \begin{aligned} P(x,y) &= x - y^3 \\ Q(x,y) &= y^3 + x^3 \end{aligned}$$

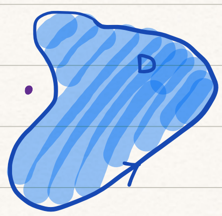
$$I = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^3\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \underline{\underline{\frac{3\pi a^4}{8}}}.$$

Ex: (Magnetfält) $B = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

a) Visa att $\int_{\partial D} B \cdot dr = 0$ för varje kompakt område som ej innehåller origo.

b) Visa att $\int_\gamma B \cdot dr = 2\pi$ för varje sluten kurva $\gamma$ som går ett varv runt origo i positiv riktning.

Lösning: a)

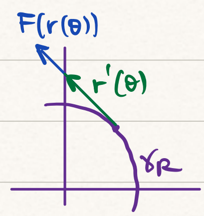



$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2 - 2x^2 - (-x^2 - y^2 + 2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Alltså från Greens formel $\int_{\partial D} B \cdot dr = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0.$

b) Beräkna $\int_{\gamma_R} B \cdot dr$ där $\gamma_R$ är cirkeln med radie $R$ moturs.

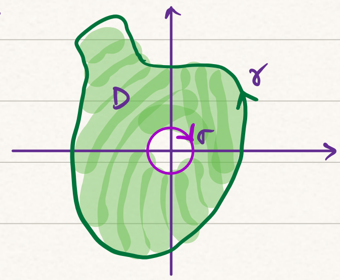



$r(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\int_{\gamma_R} B \cdot dr = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{R\sin\theta}{R^2}, \frac{R\cos\theta}{R^2} \right) \cdot (-R\sin\theta, R\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \underline{\underline{2\pi}}$$

Låt $\gamma$ vara en kurva runt origo.

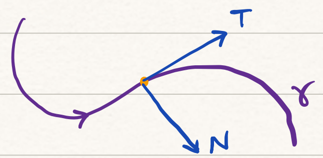



Låt $D$ vara det inre av $\gamma$ förutom de punkter inom $B_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < \varepsilon^2\}$.

Låt $\sigma = \partial B_\varepsilon$. Sedan tidigare har vi att $\int_{-\sigma} B \cdot dr = 2\pi$

$$\int_\gamma B \cdot dr + \int_\sigma B \cdot dr = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0 \Rightarrow \int_\gamma B \cdot dr = -\int_\sigma B \cdot dr = \underline{\underline{2\pi}}$$

__Flöde:__ Låt $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett vektorfält och $\gamma$ en orienterad $C^1$-kurva.




$N = RT$, där $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Vi definierar flödesintegralen av $u$ över $\gamma$ som

$$\int_\gamma u \cdot N\, ds.$$

Notera att $\int_\gamma u \cdot N\, ds = \int_\gamma u \cdot (RT)\, ds = \int_\gamma (R^t u) \cdot T\, ds$

$$= \int_\gamma \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \cdot T\, ds = \int_\gamma -u_2\, dx + u_1\, dy.$$

Låt $D$ vara ett kompakt område med $C^1$-rand $\gamma = \partial D$.
Om nu $u \in C^1(D)$ så gäller Greens formel och vi får

$$\int_\gamma u \cdot N \, ds = \int_\gamma -u_2 \, dx + u_1 \, dy = \iint_D \underbrace{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)}_{\text{lokala produktionen}} dx\,dy \qquad \text{(Gauss sats)}$$