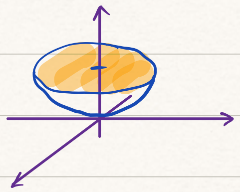
F15 Användning av integraler

Ex: Beräkna $I = \iiint_Q z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, $\quad Q = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 1\}$



$$I = \int_0^1 z\left(\iint_{x^2+y^2\le z} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\right)dz = \int_0^1 z \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r^2\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 z\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{z}} dz = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 z^{5/2}\,dz = \frac{2\pi}{3}\left[z^{7/2}\cdot\frac{2}{7}\right]_0^1$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\pi}{21}}}.$$

Alternativ 2: $I = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^1 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right)dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^1 dx\,dy$

$$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1-r^4)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \pi\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^7}{7}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{21}}}.$$

Ex: Beräkna klotets volym.

$$B_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}.$$

$$\mu(B_R) = \iiint_{B_R} dx\,dy\,dz = 2\int_0^R\left(\iint_{y^2+z^2\le R^2-x^2} dy\,dz\right)dx = \left\{\begin{array}{l} y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{array}\right\} =$$

$$= 2\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} r\,dr\,d\theta\right)dx = 4\pi\int_0^R\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 2\pi\int_0^R (R^2-x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}}.$$

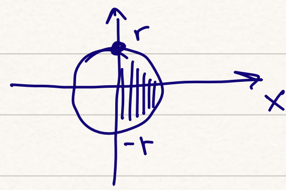
Alternativ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta \\ y = r\sin\varphi \cos\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad 0<r<R,\ 0<\varphi<2\pi,\ 0<\theta<\pi.$

Jacobideterminanten är sedan tidigare $\dfrac{d(x,y,z)}{d(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\theta$

$$\mu(B_R) = \iiint_{B_R} dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_0^R r^2\,dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2\pi\,\frac{R^3}{3}(1+1) = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}}$$

Ex: En cylinder utan lock innehåller exakt så mycket vatten att när man lutar cylindern så att vatten precis rinner ut täcker vattnet halva botten. Beräkna volymen av vattnet.



ytan ges av planet genom punkterna

$(0,r,0),\ (0,-r,0)$ och $(r,0,h)$

$v_1 = (0,2r,0) \quad v_2 = (r,r,h).$

$$N = v_1\times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2r & 0 \\ r & r & h \end{vmatrix} = (2rh, 0, -2r^2).$$

Planets ekv. $rhx - r^2 z + D = 0$,

$(0, r, 0)$ ligger i planet ger $D = 0$.

Alltså $hx - rz = 0$

$$V = \iint_{\substack{x^2+y^2 \le r^2 \\ x \ge 0}} \left(\int_0^{\frac{hx}{r}} dz \right) dx\,dy = \frac{h}{r} \iint_{x^2+y^2 \le r^2,\, x \ge 0} x\,dx\,dy$$

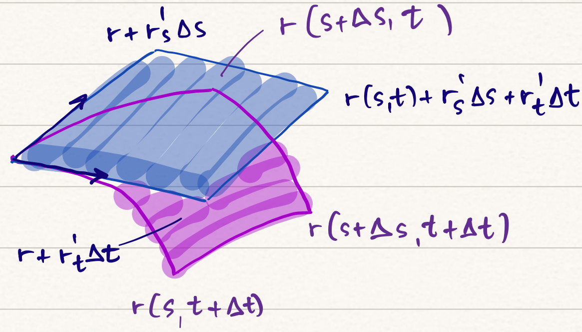
$$= \frac{h}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta = \frac{2h}{r} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r = \underline{\underline{\frac{2hr^2}{3}}}$$

<u>Area av buktig yta:</u>

Låt Y vara en yta i $\mathbb{R}^3$ med parametriseringen $r = r(s,t)$, där $(s,t) \in D$.

Tangentplanet för Y i en punkt (s,t) spänns upp av vektorerna r'_s och r'_t.

Vi kan approximera en liten del av ytan med en liten bit av tangentplanet



Arean av parallellogramet ges av

$$|r'_s \Delta s \times r'_t \Delta t| = |r'_s \times r'_t| \Delta s \Delta t$$

Vi definierar areaelementet $dS := |r'_s \times r'_t| \, ds\,dt$

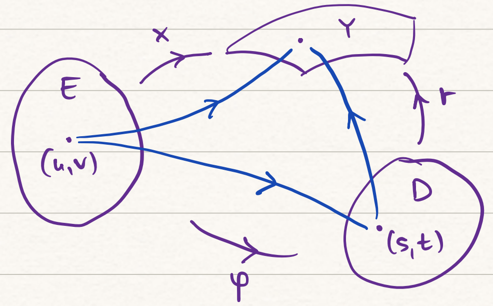
och arean av Y, $\mu(Y) := \iint_Y dS = \iint_D |r'_s \times r'_t| \, ds\,dt$

(jämför med kurvintegralen $\int_\gamma ds = \int_\alpha^\beta |r'(t)| \, dt$)

<u>Sats:</u> Areaintegralen $\iint_Y dS$ är oberoende av parametrisering.

<u>Bevis:</u> Antag att $r : D \to Y$ och $x : E \to Y$ är två parametriseringar av Y.

Låt $\varphi : E \to D$ vara den bijektion som uppfyller



$x(u,v) = r(\varphi(u,v))$ för alla $(u,v) \in E$.

Vi vill visa att $\iint_D |r'_s \times r'_t| \, ds\,dt = \iint_E |x'_u \times x'_v| \, du\,dv$

Vi har $x'_u(u,v) = \frac{d}{du}(x(u,v)) = \frac{d}{du}(r(s,t)) = r'_s \cdot s'_u + r'_t \cdot t'_u$

och $x'_v(u,v) = r'_s \cdot s'_v + r'_t \cdot t'_v$.

r'_s och r'_t vektorer
s'_u, s'_v, t'_u, t'_v tal

Alltså
$$\begin{aligned}
|x'_u \times x'_v| &= |(r'_s \cdot s'_u + r'_t \cdot t'_u) \times (r'_s \cdot s'_v + r'_t \cdot t'_v)| \\
&= |(r'_s \cdot s'_u \times r'_t \cdot t'_v) + (r'_t \cdot t'_u \times r'_s s'_v)| \\
&= |(s'_u t'_v - s'_v t'_u)| \cdot |r'_s \times r'_t|
\end{aligned}$$
(eftersom $r'_s \times r'_t = -r'_t \times r'_s$)

Notera nu att $|s'_u t'_v - s'_v t'_u| = \text{abs}\begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \text{abs}\left(\frac{d(s,t)}{d(u,v)}\right)$

$$\iint_E |x'_u \times x'_v|\,du\,dv = \iint_E |r'_s \times r'_t| \cdot \left|\frac{d(s,t)}{d(u,v)}\right| \cdot du\,dv = \iint_D |r'_s \times r'_t|\,ds\,dt.$$

Ex: Beräkna arean av sfären med radie R.

En parametrisering är $r(\varphi,\theta) = (R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta)$
där $D = \{(\varphi,\theta) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\}$.

$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ 0)$$
$$r'_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ -R\sin\theta)$$

$$r'_\varphi \times r'_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= R^2(-\cos\varphi\sin^2\theta,\ -\sin\varphi\sin^2\theta,\ -\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta)$$
$$= R^2(-\cos\varphi\sin^2\theta,\ -\sin\varphi\sin^2\theta,\ -\sin\theta\cos\theta)$$

$$|r'_\varphi \times r'_\theta| = R^2\sqrt{\cos^2\varphi\sin^4\theta + \sin^2\varphi\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta} = R\sqrt{\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}$$
$$= R^2 \cdot \sin\theta$$

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |r'_\varphi \times r'_\theta|\,d\varphi\,d\theta = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\varphi\,d\theta = R^2 \cdot 2\pi\,[-\cos\theta]_0^\pi$$

$$= R^2 \cdot 2\pi\,(1+1) = \underline{\underline{4\pi R^2}}.$$

Ex: Härled en formel för area av en funktionsyta.

Lösning: $z = f(x,y)$, $f : D \to \mathbb{R}$

$$r(x,y) = (x,y,z) = (x,y,f(x,y))$$

$$r'_x = (1,0,f'_x), \quad r'_y = (0,1,f'_y).$$

$$r'_x \times r'_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1).$$

$$|r'_x \times r'_y| = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}$$

Alltså $$\iint_Y dS = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dx\,dy$$