

F13 Generaliserade integraler:

Inledande exempel: Låt $f(x, y) = xy(2 - xy)e^{-xy}$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 y e^{-xy}) = 2xy e^{-xy} - x^2 y e^{-xy} = xy(2 - xy)e^{-xy}.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \lim_{R \rightarrow \infty} \left[x^2 y e^{-xy} \right]_0^R dy$$

$$= \int_0^1 \lim_{R \rightarrow \infty} (R^2 y e^{-Ry} - 0) dy = \int_0^1 0 dy = \underline{\underline{0}}$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^\infty \left[y^2 x e^{-xy} \right]_0^1 dx = \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

(konvergent och positiv)

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{x e^{-x}}{-1} \right]_0^R + \int_0^R e^{-x} dx \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-R e^{-R} + \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^R \right) = \underline{\underline{1}}$$

Hmm.

Ikke-negativ integrand:

Låt Ω vara en öppen mängd i $\mathbb{R}^2$ och låt f vara en kontinuerlig funktion i Ω med

$$f(x, y) \geq 0, \text{ då } (x, y) \in \Omega.$$

Ex: $f(x, y) = \frac{y}{x^2}, \quad \Omega = \{(x, y) : x > 0, 0 \leq y \leq 1\}.$

Låt $M = \left\{ \iint_D f(x,y) dx dy : D \subset \mathbb{R}^2 \text{ är kompakt} \right\}$.

Definition: Vi säger att $I = \iint f(x,y) dx dy$ är konvergent om M är uppåt begränsad, annars divergent.
Om integralen är konvergent definieras värdet $I = \sup M$.

Ex: Är integralen $\iint_D \frac{1}{1+x^2} dx dy$ konvergent?

där $D = \{(x,y) : 0 \leq x, 0 \leq y \leq 1\}$

Lösning: Låt $D_n = \{(x,y) : 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq 1\}$

För varje kompakt mängd $K \subset D$ finns ett $n \in \mathbb{N}$ sådant att $K \subset D_n$.



$$\iint_K \frac{1}{1+x^2} dx dy \leq \iint_{D_n} \frac{1}{1+x^2} dx dy.$$

$$\int_0^1 \int_0^n \frac{1}{1+x^2} dx dy = [\arctan x]_0^n = \arctan n$$

$$\sup M = \frac{\pi}{2} \quad \text{Antag} \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \text{ är konvergent.}$$

Ex: Är $\iint_Q \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ konvergent, $Q = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Lösning: Det räcker att studera områden

$$D_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq n, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\iint_{D_n} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^n \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^n \frac{r dr}{1+r^2}$$

$$\int_0^n \frac{r dr}{1+r^2} \geq \frac{1}{2} \int_0^n \frac{dr}{r} \quad \text{divergent då } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Anså är } \iint_0^\infty \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} \quad \text{divergent.}$$

Sats: I $\mathbb{R}^n$ gäller att

$$1) \quad \iint_{|x|>1} \frac{1}{|x|^a} dx \quad \text{är konvergent} \Leftrightarrow a > n$$

$$2) \quad \iint_{0<|x|<1} \frac{1}{|x|^a} dx \quad \text{är konvergent} \Leftrightarrow a < n.$$

Beris: ($n=2$)

2) För varje kompakt mängd K i $\{x \in \mathbb{R}^2: |x| < 1, x \neq 0\}$.
finns ett $\varepsilon > 0$ sådant

$$K \subset B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2: \varepsilon < |x| < 1\}.$$

$$\iint_{B_\varepsilon} \frac{1}{|x|^a} dx = \left\{ \begin{matrix} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{matrix} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^a} r dr d\theta = 2\pi \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^{a-1}} dr$$

konvergent då $\varepsilon \rightarrow 0$ om och endast om $a-1 < 1$

$$\Leftrightarrow a < 2.$$

$$1) \quad \text{Låt } B_n = \{x \in \mathbb{R}^2: 1 \leq |x| \leq n\}$$

$$\iint_{B_n} \frac{1}{|x|^a} dx = \int_0^{2\pi} \int_1^n \frac{1}{r^{a-1}} dr d\theta \quad \text{konvergent om } a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2.$$

Sats: Antag att $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$
och att

$\iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$ konvergent,

då är $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ konvergent.

Via kontraposition om $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ divergent så gäller
att $\iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$ divergent.

Ex: Undersök om $\iint_{\Omega} \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} dx dy$, $\Omega = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\}$,
är konvergent.

Lösning: $f(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} \geq \frac{1}{x^2+y^2} =: h(x,y) \geq 0$.

Eftersom $\iint_{\Omega} h(x,y) dx dy$ är divergent är $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ divergent.

Intergrand med växlande tecken.

Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$f^+(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \text{om } f(x,y) \geq 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases} = \max(f(x,y), 0)$$

$$f^-(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{om } f(x,y) \geq 0 \\ -f(x,y), & \text{annars} \end{cases} = -\min(f(x,y), 0)$$

Notera att $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$,

$$f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y) \quad \text{och} \quad |f(x,y)| = f^+(x,y) + f^-(x,y)$$

Definition: Vi säger att $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ är konvergent

om $\iint_{\Omega} f^+(x,y) dx dy$ och $\iint_{\Omega} f^-(x,y) dx dy$ är

konvergenta.

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy := \iint_{\Omega} f^+(x,y) dx dy - \iint_{\Omega} f^-(x,y) dx dy.$$

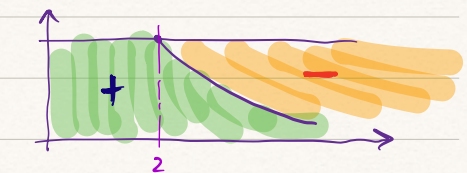
Ex: (igen)

Visa att $\iint_{\Omega} xy(2-xy)e^{-xy} dx dy$, $\Omega = \{(x,y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$ är divergent.

Lösning: $f(x,y) \geq 0 \iff 2-xy \geq 0 \iff y \leq \frac{2}{x}$.

$$\iint_{\Omega} f^+(x,y) dx dy \leq \int_2^{\infty} \left(\int_0^{\frac{2}{x}} xy(2-xy)e^{-xy} dy \right) dx$$

$$= \int_2^{\infty} x \left[y^2 e^{-xy} \right]_0^{\frac{2}{x}} dx = \int_2^{\infty} x \left(\frac{4}{x^2} e^{-2} \right) dx = \frac{4}{e^2} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$$



divergent.

Itererad integration kan endast göras då integralen är konvergent.