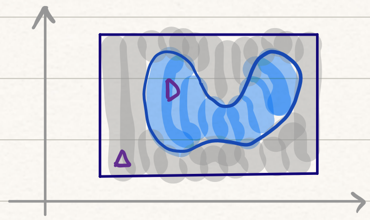
F12 Integration över begränsade mängder

Definition: Låt $f: D \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion, $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd,

$$f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Vi säger att f är integrerbar på D om f_D är integrerbar på någon rektangel Δ sådan att $D \subset \Delta$ och

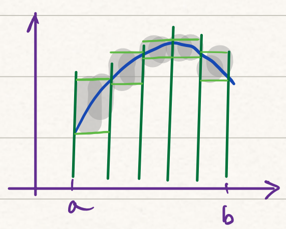
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy.$$



Nollmängder: En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kallas en nollmängd om vi för varje $\varepsilon > 0$ kan täcka Ω med rektanglar Δ_i vars sammanlagda area är högst ε. Med andra ord $\Omega \subset \bigcup_i \Delta_i$ med $\sum_i \mu(\Delta_i) < \varepsilon$.

Lemma: Grafen till en kontinuerlig funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är en nollmängd i planet.

Bevis:



Eftersom f är likformigt kontinuerlig gäller att för varje $\varepsilon > 0$ finns δ:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{då} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Dela nu in $[a,b]$ i delintervall Δ_i med $\mu(\Delta_i) < \delta$.

Vi kan nu täcka grafen $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ med rektanglar R_i med höjd mindre än $\frac{\varepsilon}{b-a}$ och bredd $\mu(\Delta_i) < \delta$.

Alltså

$$\mu(R_i) < \sum_i \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \mu(\Delta_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \mu(\Delta_i) = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Ex: $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}$ (Uppräkneligt många punkter).

Bilda $\frac{\varepsilon}{2^j}$ kring $\underset{x_j}{\overbrace{\vdash\!+\!\dashv}^{\frac{\varepsilon}{2^j}}}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \cdot 1$$ Geometrisk serie. $\mathbb{Q}$ nollmängd

Definition: En mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ kallas kvadrerbar om randen ∂D är en nollmängd.

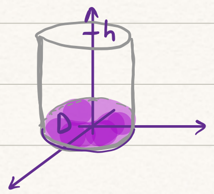
Lemma: Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D. Då är f integrerbar på D.

Definition: Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara kvadrerbar, då definieras arean av D som $\mu(D) := \iint_D 1 \, dxdy = \iint_D dxdy$.

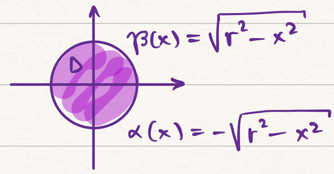
Sats: Låt $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerliga, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ och låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då är f integrerbar och

$$\iint_D f(x,y) \, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Ex: Visa att volymen av en cylinder är $\pi \cdot r^2 \cdot h$.



$$V = \iint_D h \, dx\,dy$$



$$V = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h \, dy \right) dx = h \int_{-r}^{r} \left(2 \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = 2h \int_{-r}^{r} \left[y \right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dx$$

$$= 2h \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4h \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin\theta \\ dx = r\cos\theta \, d\theta \end{array} \right\} = 4h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2\theta} \; r \cos\theta \, d\theta$$

$$= 4h \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = 4hr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ \Rightarrow \cos^2\theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2}. \end{aligned}}$$

$$= \pi h r^2 + 2hr^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\pi h r^2}}.$$

Ex: Beräkna $I = \iint_Q \frac{1}{x - y + 1} dx\,dy$, $Q = \{ (x,y) : 0 \le y \le x \le 1 \}$

Lösning:

$$I = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x - y + 1} dy \, dx = \int_0^1 \left[-\ln|x - y + 1| \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \left(0 + \ln(1 + x) \right) dx = \left[(1 + x) \ln(1 + x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx$$

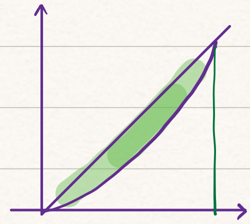
$$= 2 \ln 2 - 1$$

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{x - y + 1} dx \; dy = \int_0^1 \left[\ln|x - y + 1| \right]_y^1 dy = \int_0^1 \ln(2 - y) dy = \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - y \\ dt = -dy \end{array} \right\}$$

$$= -\int_1^0 \ln(1 + t) \, dt = \int_0^1 \ln(1 + t) \, dt.$$ Samma som ovan.

Ex: Beräkna $I = \iint_Q \sin x^2 \, dx\,dy$ där Q är det begränsade område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^3$.

Lösning:



$$I = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} \sin x^2 \, dy\,dx = \int_0^1 \sin x^2 \, [y]_{x^3}^{x} \, dx$$

$$= \int_0^1 \sin x^2 \, (x - x^3) \, dx$$

$$= \left\{ \begin{aligned} t &= x^2 \\ dt &= 2x\,dx \end{aligned} \right\} = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-t)\sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left([-\cos t\,(1-t)]_0^1 - \int_0^1 \cos t \, dt \right) = \frac{1}{2}\left(0 + 1 - [\sin t]_0^1\right) = \frac{1 - \sin 1}{2}$$

Medelvärdessatsen för integraler:

Antag att $f : D \to \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^2$ kvadrerbar och bågvis sammanhängande och f är kontinuerlig.

Då finns $M = \max_{x \in D} f(x)$ och $m = \min_{x \in D} f(x)$.

Alltså är $m \le f(x,y) \le M \quad \forall (x,y) \in D$.

$$\iint_D m \, dx\,dy \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D M \, dx\,dy$$

$$m\,\mu(D) \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M\,\mu(D)$$

$$m \le \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M.$$

Eftersom D är bågvist sammanhängande finns

$(a,b) \in D$ så att $f(a,b) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$