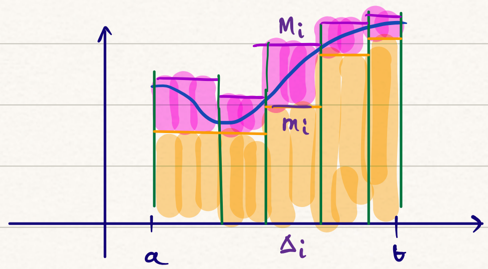
F11 Integraler över rektanglar

Inledande exempel: $d=1$.



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ $\qquad \mu(\Delta_i) = x_i - x_{i-1}$

$M_i = \max\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$ $\qquad$ måttet av Δ_i

$m_i = \min\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(\Delta_i) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(\Delta_i)$$

Bilda $\quad L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(\Delta_i) : m_i \le f(x),\ x \in \Delta_i \right\}$

$\qquad\qquad U = \left\{ \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(\Delta_i) : M_i \ge f(x),\ x \in \Delta_i \right\}$

Om $\sup L = \inf U$ så är f integrerbar och

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup L.$$

Vilka problem finns i flera variabler?

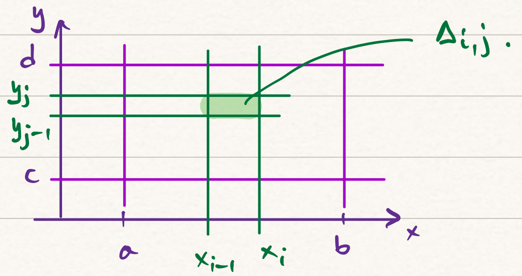
- Områden, rand, obegränsade mängder och funktioner.

Integration över rektanglar ($d=2$)

En funktion $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, kallas enkel om

1) Δ är en union av axel-parallella rektanglar på formen $\Delta_{i,j} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \le x < x_i,\ y_{j-1} \le y < y_j\}$

2) Φ är konstant på $\Delta_{i,j}$.



$$\mu(\Delta_{i,j}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

För en enkel funktion Φ på $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ definieras

$$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy := \sum_{i,j} c_{i,j}\,\mu(\Delta_{i,j}), \quad \text{där} \quad c_{i,j} = \phi(x), \ x \in \Delta_{i,j}.$$

Räkneregler: Enkla funktioner Φ och Ψ på Δ.

a) $$\iint_\Delta \alpha\,\Phi(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

b) $$\iint_\Delta (\Phi(x,y) + \Psi(x,y))\,dx\,dy = \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy + \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy.$$

(Ses genom förfining av området.)

c) om $\Phi \le \Psi$ så $$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy$$

d) $$\left| \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \right| \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy$$

Bevis av d: $\pm\Phi(x,y) \le |\Phi(x,y)|$.

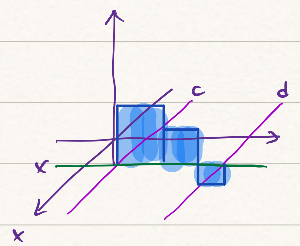
Från c) är nu $$\iint_\Delta \pm\Phi(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy$$

från a) följer $$\pm\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy. \quad \blacksquare$$

En variabel i taget: $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$, Φ enkel, $\Delta = [a,b] \times [c,d]$.

Fixera x och studera $\varphi(y) = \Phi(x,y)$, $x \in [a,b]$

φ blir en enkel funktion på $[c,d]$



Alltså finns $A_x = \int_c^d \varphi(y)\,dy$

$$I = \int_a^b A_x\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x,y)\,dy \right) dx.$$

$$= \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy, \text{ där } \Delta = [a,b] \times [c,d].$$

Riemannintegraler:

Definition: Låt $f : \Delta \to \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ rektangel

Bilda $L = \left\{ \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy : \Phi \leq f,\ \Phi \text{ enkel funktion} \right\}$

$U = \left\{ \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy : \Psi \geq f,\ \Psi \text{ enkel funktion} \right\}.$

Om $\sup L = \inf U$ så är f integrerbar på Δ

och $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy := \sup L$.

Räknereglerna för integraler av enkla funktioner kan utvidgas till integrerbara funktioner.

Sats: Om f är en integrerbar funktion över en rektangel $\Delta = [a,b]\times[c,d]$ och om högerleden är definierade så gäller

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy \,.$$

Antag att högerleden är definierade.

Bevis: För varje enkel funktion $\Psi \geq f$ gäller att

$$\int_c^d f(x,y)\,dy \leq \int_c^d \Psi(x,y)\,dy \,, \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \leq \int_a^b \left(\int_c^d \Psi(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy$$

Analogt gäller för varje $\Phi \leq f$ att

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \geq \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x,y)\,dy\right)dx = \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx$$

Alltså $\quad \sup L \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \leq \inf U$

med andra ord $\quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$. ∎

Exempel: Låt $\Delta = [0,1]\times[0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \,, & y = 0 \text{ och } x \notin \mathbb{Q}\cap[0,1]. \\ 0 \,, & \text{annars} \end{cases}$$

Från envariabelanalys $\int_0^1 f(x,0)\,dx$ existerar ej.

Men, $\Phi = 0$ är en enkel funktion sidan att $f \geq \Phi$ och $\Psi = \begin{cases} 0 \,, & \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \,, \; x\in[0,1] \\ 1 \,, & 0 \leq y < \frac{1}{n} \,, \; x \in [0,1] \end{cases}$ enkel med $f \leq \Psi$.

Nu gäller att $\iint_\Delta \Phi \, dxdy = 0$, $\iint_\Delta \Psi \, dxdy = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \to 0$, då $n \to 0$.

Alltså är f integrerbar med $\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = 0$.

(*) Sats: Om f är kontinuerlig på $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ så är f integrerbar på Δ.

Definition: En funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara likformigt kontinuerlig om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ för varje $x, y \in D$ sådana att $|x - y| < \delta$.

Vi kommer att använda:

Sats: Låt $f: K \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion och $K \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt mängd. Då är f likformigt kontinuerlig.

Bevis av (*): Alltså är f likformigt kontinuerlig.

Låt $\varepsilon > 0$. Vill visa att det finns enkla funktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \le f \le \Psi$ och

$$\iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy - \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy < \varepsilon.$$

Eftersom f är likformigt kontinuerlig finns för $\frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}$ ett $\delta > 0$ sådant

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \quad \text{för varje} \quad |(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| < \delta .$$

Dela nu in Δ i rektanglar Δ_i sådana att diagonalen är mindre än δ.

Alltså är $M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}$ på Δ_i.

Definiera $\Psi(x,y) = M_i$ på Δ_i och $\Phi(x,y) = m_i$ på Δ_i.

Vi är klara ty $$\iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy = \sum_i (M_i - m_i)\mu(\Delta_i)$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \sum \mu(\Delta_i) = \varepsilon . \qquad \blacksquare$$

<u>Sats:</u> Om f är kontinuerlig på $\Delta = [a,b]\times[c,d]$ så gäller

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy .$$

<u>Bevis:</u> Det räcker att visa att HL är definierade.

Fixera $x \in [a,b]$ och notera att $y \mapsto f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion på $[c,d]$.

Därför existerar
$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$
för $x \in [a,b]$.

Om A är kontinuerlig är A integrerbar och
$$\int_a^b A(x)\,dx \quad \text{existerar.}$$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns $\delta > 0$ sådant att

$$|A(x_1) - A(x_2)| = \left| \int_c^d (f(x_1,y) - f(x_2,y))\,dy \right|$$

$$\leq \int_c^d |f(x_1,y) - f(x_2,y)|\,dy < (*)$$

Eftersom f är likformigt kontinuerlig gäller att för $\frac{\varepsilon}{d-c}$ finns ett δ sådant att

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{d-c} \quad \text{för alla} \quad |(x_1,y) - (x_2,y)| < \delta.$$

Alltså är $(*) \leq \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,dy = \varepsilon$. $\blacksquare$

Ex: Beräkna $\iint_{[0,1]\times[0,1]} xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x\,dx \right) y^2\,dy$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$