F1 Introduktion $\mathbb{R}^n$ och mängder

- Välkomna, kursrepresentanter
- Canvassidan
- Föreläsningsplan, Rekommenderade uppgifter & Inlämningsuppgifter.

Rummet $\mathbb{R}^n$: (Använder definierade begrepp från Lin. Alg.)

Låt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ och $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $s \in \mathbb{R}$.

$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ (addition)

$x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. (skalär produkt)

$s \cdot x := (s x_1, s x_2, \dots, s x_n)$

$$|x| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Vinkeln θ mellan x och y definieras av

$$\theta := \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right)$$ (väldefinierat?)

Sats (Cauchy-Schwarz olikhet):

Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|.$$

Likhet gäller endast då x och y är linjärt beroende.

Bevis: Om $x = 0$ är $HL = VL = 0$.

Antag att $x \neq 0$ och bilda $u = tx + y$, $t \in \mathbb{R}$.

För varje t gäller att $0 \leq |u|^2 = u \cdot u = (tx+y)\cdot(tx+y)$
$= t^2|x|^2 + 2t\, x\cdot y + |y|^2 = |x|^2\left(t^2 + \frac{2t\, x\cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2}\right)$
$= |x|^2\left(\left(t + \frac{x\cdot y}{|x|^2}\right)^2 + \frac{|y|^2}{|x|^2} - \frac{(x\cdot y)^2}{|x|^4}\right)$

Låt oss önska att $t + \frac{x\cdot y}{|x|^2} = 0$. Då får vi

$$\frac{|y|^2}{|x|^2} - \frac{(x\cdot y)^2}{|x|^4} \geq 0 \iff |x|^2 \cdot |y|^2 \geq (x\cdot y)^2$$

$\iff |x|\cdot|y| \geq |(x\cdot y)|$. och satsen är sann.

Vår önskning är uppfylld om vi väljer $t_0 = -\frac{x\cdot y}{|x|^2}$.

Andra delen: $|x\cdot y| = |x|\cdot|y| \iff x$ och y är linjärt beroende

Låt $u_0 = t_0 x + y$. Alltså gäller att $0 \leq |u_0|^2 = \frac{1}{|x|^4}\left(|x|^2\cdot|y|^2 - (x\cdot y)^2\right)$

$|x|\cdot|y| = x\cdot y \iff |u_0|^2 = 0 \iff u_0 = 0 \iff t_0 x + y = 0$
$\iff x$ och y är linjärt beroende.

$\blacksquare$

Sats (Triangelolikheten):
Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$, då gäller att $|x+y| \leq |x| + |y|$.
Likhet gäller om och endast om x är i samma riktning som y.

Bevis: Vi är klara med olikheten om vi kan visa att

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 .$$

$$|x+y|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = |x|^2 + |y|^2 + 2x\cdot y$$

Cachy-Schwarz olikhet

$$\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\cdot|y| = (|x|+|y|)^2 .$$

Likhet gäller om och endast om $x\cdot y = |x|\cdot|y|$.
Vi vet att $|x y| = |x|\cdot|y|$ enligt Cauchy-Schwarz olikhet gäller om och endast om $x + k y = 0$, för något $k \in \mathbb{R}$.

Men om $k > 0$ har vi $x\cdot y = (-k y)\cdot y = -k|y|^2 < 0$
medan $|x|\cdot|y| = k|y|^2 > 0$.
Alltså är $x\cdot y = |x|\cdot|y|$ omm $x + k y = 0$, $k < 0$. ∎

Följdsats (Omvända triangelolikheten):
Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$, då gäller att

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x+y| .$$

Triangelolikheten

Bevis: $|x| = |x + y + (-y)| \leq |x+y| + |y|$

$|x| - |y| \leq |x+y|$.

Symmetri ger att $|y| - |x| \leq |x+y|$
och därmed

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x+y| .$$ ∎

Sats: Låt $x \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|x_k| \leq |x| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \qquad , 1 \leq k \leq n.$$

Bevis:

$$|x_k|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_k|^2 + \dots + |x_n|^2 = |x|^2.$$

$$\Rightarrow |x_k| \leq |x|.$$

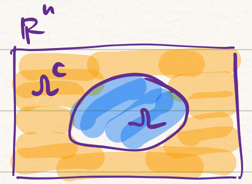
Nu till $|x| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

$$\begin{aligned}|x| &= |x_1 e_1 + (x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)| \\ &\leq |x_1| + |x_2 e_2 + \dots + x_n e_n|. \\ &\leq \dots \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.\end{aligned}$$

Mängder i $\mathbb{R}^n$:

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Komplementet till Ω betecknas

$$\Omega^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \Omega\}.$$

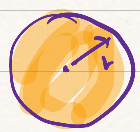


Öppet klot: $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}$.

Ex: $d=1$: $|x-a| < r \iff -r < x-a < r \iff a-r < x < a+r$

$d=2$: $|x-a| < r \iff \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r$

$$\iff (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2$$



Definition: Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En punkt $a \in \mathbb{R}^n$ sägs vara

a) en **inre punkt** till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(a)$ sådant att $B_r(a) \subset \Omega$

b) en **yttre punkt** till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(a)$ sådant att $B_r(a) \subset \Omega^c$.

c) en **rand punkt** till Ω om det för varje öppet klot $B_r(a)$ finns punkter från Ω och Ω^c.

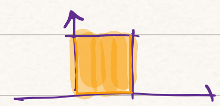
$$\partial\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ är en rand punkt till } \Omega\}.$$

Definition: En mängd $\Omega \in \mathbb{R}^n$ kallas

a) **öppen** om $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$ $\quad (\partial\Omega \subset \Omega^c)$

b) **sluten** om $\partial\Omega \cap \Omega^c = \emptyset$. $\quad (\partial\Omega \subset \Omega)$.

Ex: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \, , \, 0 \leq y < 1\}$.



Ω är varken öppen eller sluten.

$\mathbb{R}^n$ är både sluten och öppen.

Definition: En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kallas **begränsad** om det finns en boll $B_R(0)$ sådan att $\Omega \subset B_R(0)$.

Ω kallas **kompakt** om Ω är sluten och begränsad.

Ex: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 1 \, , \; |y| < \frac{1}{x} \}$

Ω är öppen, obegränsad, ej kompakt