Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2024-06-04
Skrivtid: 08:00 – 13:00
Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna
Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	27	24	21	18	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Bestäm de tangentplan till ytan $xy+yz+xz=1$ som är parallella med planet $x+2y+z=3$.

   Lösning: Ytan är en nivåyta till funktionen $F(x,y,z) = xy+yz+xz$ och därmed ges en normalvektor av tangentplanet i (x,y,z) av $N(x,y,z) = (\nabla F)(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$. Vi får att $N(x,y,z) = k(1,2,1)$ för något k. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} y+z=k \\ x+z=2k \\ x+y=k \\ xy+yz+xz=1 \end{cases}$$

   Ekvation (2) - (1) ger att $x-y=k$ som tillsammans med ekvation (3) ger att $x=k$, $y=0$ och $z=k$. Ekvation (4) ger nu att $k^2=1$ vilket leder till punkterna $\pm(1,0,1)$.

   För $(1,0,1)$ får vi planet $(1,2,1)\cdot(x-1,y,z-1)=0$ vilket är $x-1+2y+z-1=0$ eller $x+2y+z-2=0$.

   För $-(1,0,1)$ får vi planet $-(1,2,1)\cdot(x+1,y,z+1)=0$ vilket är $-x-1-2y-z-1=0$ eller $x+2y+z+2=0$.

2. Visa att integralen

$$\iint_{|x|<1} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^a}$$

är konvergent om och endast om $a < 2$.

Lösning: Integralen är generaliserad vid origo. Mängderna

$$B_\varepsilon = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \varepsilon \le |x| \le 1\big\}$$

för $0 < \varepsilon < 1$ är alla kompakta och beskriver en uttömmande svit av

$$\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \le 1\big\}$$

och integranden är positiv och begränsad på varje B_ε.

Vi nyttjar polära koordinater och får

$$\iint_{\varepsilon<|x|<1} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^a} = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{dr\,d\theta}{r^{a-1}} = 2\pi \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{a-1}}.$$

Integralen i högerledet är konvergent om och endast om $a - 1 < 1$ vilket är detsamma som $a < 2$.

3. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (2xy - x^2)\,dx + (3x + y)\,dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till det begränsade område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$.

Lösning: Via Greens formel får vi

$$I = \int_\gamma (2xy - x^2)\,dx + (3x + y)\,dy = \iint_D (3 - 2x)\,dxdy,$$

där $D = \{(x, y) : x^2 \le y \le \sqrt{x} : 0 \le x \le 1\}$. Alltså gäller att

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3 - 2x)\,dydx = \frac{7}{10}.$$

4. Bestäm det största värdet av $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ då x, y, z är vinklarna i en triangel.

Lösning: Vi vill optimera $f(x, y, z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ under bivillkoret $g(x, y, z) = x + y + z = \pi$, där x, y, z alla är icke-negativa. Observera att $f(x, y, z) = 0$ på randen av bivillkorsytan.

Låt oss nu undersöka inre punkter. En extrempunkt måste nu uppfylla

$$(\nabla f)(x,y,z) = \lambda(\nabla g)(x,y,z)$$

tillsammans med att $g(x,y,z) = \pi$. Detta ger att

$$\begin{cases} \cos x \sin y \sin z = \lambda \\ \sin x \cos y \sin z = \lambda \\ \sin x \sin y \cos z = \lambda \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

som leder till att

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Notera att $h(x) := \cos x/\sin x$ uppfyller att $f'(x) = -1/\sin^2 x < 0$ och är därmed injektiv. Alltså måste $x = y = z = \pi/3$. Därmed är $f(\pi/3, \pi/3, \pi/3) = 3^{3/2}/8$ ett globalt maxvärde.

5. Bestäm den generaliserade integralen

$$\iint_\Omega \frac{dxdy}{(x^3y+1)^2},$$

där $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, x^2y > 1\}$.

Lösning: Notera att integranden är positiv. Vi kan därmed nyttja itererad integration

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega \frac{dxdy}{(x^3y+1)^2} &= \left\{(s,t) = (x, x^2y), dsdt = x^2dxdy\right\} \\
&= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{s^2(1+st)^2}\, dsdt \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{s^2}\left[-\frac{1}{s(1+st)}\right]_1^\infty ds \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{s^3(1+s)}\, ds
\end{aligned}$$

Vi utför partialbråksuppdelning

$$\frac{1}{s^3(1+s)} = \frac{A + Bs + Cs^2}{s^3} + \frac{D}{1+s}$$

vilket ger att $A = C = 1$ och $B = D = -1$. Därmed är

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{s^3(1+s)}\, ds &= \int_1^\infty \left(\frac{1-s+s^2}{s^3} - \frac{1}{1+s}\right) ds \\
&= \left[-\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{s} + \ln s - \ln(1+s)\right]_1^\infty \\
&= \ln 2 - 1/2.
\end{aligned}$$

6. Låt $F(x, y, z) = (4x - x^3 + 1, 4y - y^3, 4z - z^3 - 3x)$. Bestäm den slutna och begränsade yta som maximerar flödesintegralen

$$\iint_\Omega F \cdot N \, dS.$$

Betäm även flödet.

Lösning: Enligt divergenssatsen är

$$\begin{aligned}\iint_\Omega F \cdot N \, dS &= \iiint_K \operatorname{div} F \, dxdydz \\ &= \iiint_K \left(12 - 3(x^2 + y^2 + z^2)\right) \, dxdydz,\end{aligned}$$

där K har randen Ω. Vi ser att värdet av denna integral maximeras då

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

eftersom integranden är icke-negativ precis på denna mängd.

Via polära koordinater får vi värdet på integralen till

$$\frac{256\pi}{5}.$$

7. Beräkna volymen av det område i $\mathbb{R}^3$ som definieras genom $2xyz \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq 1$.

Lösning: Volymen V ges av $1 - \mu(\Omega)$, där

$$\Omega = \{(x, y, z) : 2xyz \geq 1 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

och $\mu(\Omega)$ beskriver volymen av Ω. Vi får

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \int_{1/2}^1 \int_{1/2z}^1 \int_{1/2yz}^1 dxdydz \\ &= \int_{1/2}^1 \int_{1/2z}^1 \left(1 - \frac{1}{2yz}\right) dydz \\ &= \int_{1/2}^1 \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \ln\left(\frac{1}{2z}\right)\right) dz\end{aligned}$$

med hjälp av variabelbytet $t = 1/2z$ får vi värdet

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{4}.$$

8. Bestäm alla funktioner av formen $u(x,y) = f(y/x)$ som uppfyller

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

för $x > 0$.

Lösning: Vi börjar med att beräkna $u'_x = f'(y/x)(-y/x^2)$ och $u'_y = f'(y/x)/x$. Därmed är

$$u''_{xx} = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^4} + f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{2y}{x^3}$$

och

$$u''_{yy} = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}.$$

Alltså gäller att

$$0 = x^2(u''_{xx} + u''_{yy}) = f''(t)(1+t^2) + f'(t)2t,$$

där $t = y/x$.

Nu kan vi utnyttja att $f''(t)(1+t^2) + f'(t)2t = 0$ är detsamma som

$$\frac{d}{dt}\left(f'(t)(1+t^2)\right) = 0$$

vilket ger att $f'(t) = D/(1+t^2)$, för någon konstant D och

$$f(t) = D \arctan t + E.$$

Alltså är $u(x,y) = D \arctan \frac{y}{x} + E$, där $D, E \in \mathbb{R}$.