



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2024-06-04

Skrivtid: 08:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	27	24	21	18	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Bestäm de tangentplan till ytan $xy + yz + xz = 1$ som är parallella med planet $x + 2y + z = 3$.

2. Visa att integralen

$$\iint_{|x| < 1} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^a}$$

är konvergent om och endast om $a < 2$.

3. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (2xy - x^2) dx + (3x + y) dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till det begränsade område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$.

4. Bestäm det största värdet av $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ då x, y, z är vinklarna i en triangel. Motivera noggrant alla dina argument.

5. Bestäm den generaliserade integralen

$$\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{(x^3 y + 1)^2},$$

där $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, x^2 y > 1\}$.

6. Låt $F(x, y, z) = (4x - x^3 + 1, 4y - y^3, 4z - z^3 - 3x)$. Bestäm den slutna och begränsade yta som maximerar flödesintegralen

$$\iint_{\Omega} F \cdot N \, dS.$$

Bestäm även flödesintegralens värde.

7. Beräkna volymen av det område i $\mathbb{R}^3$ som definieras av $2xyz \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq 1$.

8. Bestäm alla funktioner av formen $u(x, y) = f(y/x)$ som uppfyller

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

för $x > 0$.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!