



Tentamen i kursen SF1674 – Flervariabelanalys

Datum: 2024-03-14

Skrivtid: 08:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	27	24	21	18	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. (a) Visa att fältet $F(x, y) = (\sin x + x \cos x + ye^y, x(y+1)e^y)$ är ett potentialfält.

(b) Beräkna

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

där γ är den rätta linjen från punkten $(\pi/2, 0)$ till punkten $(\pi, 1)$.

2. Beräkna integralen

$$\iiint_{\Omega} e^{-x^2-y^2-z} dx dy dz,$$

där $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$.

3. Bestäm det största och minsta värdet av

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \ln(x + y),$$

då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $1 \leq x + y \leq 4$.

4. Ytan Y ges av ekvationen $\ln z + x + 2 = xy + 2z$.

- (a) Visa att det finns en funktion f så att ytan kan beskrivas som $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 1)$.
- (b) Antag att f är av klass C^3 i en omgivning av $(0, 0)$ och bestäm Taylorutvecklingen av f av grad 2 i $(0, 0)$.

5. (a) Antag att $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är av klass C^2 , där

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}.$$

Låt oss införa de nya variablerna

$$\begin{cases} s = \sqrt{y} \\ t = \sqrt{x - y}. \end{cases}$$

Transformera uttrycket

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i de nya variablerna.

(b) Uttryck differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

i de nya variablerna.

(c) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen och uttryck svaret i de ursprungliga variablerna x och y .

6. Beräkna

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

där $F(x, y, z) = (x^2y, x^3/3, xy)$ och γ är skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och ytan $z = y^2 - x^2$ orienterad moturs sedd ovanifrån (från högre z -värden).

7. Låt a vara en positiv konstant. Beräkna arean av randen till mängden

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2, x^2 + y^2 \leq 2az\}.$$

8. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar.

(b) Visa att om $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ så är f differentierbar.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!