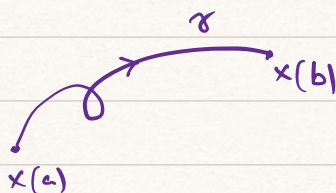


§8 Kurvor och ytor

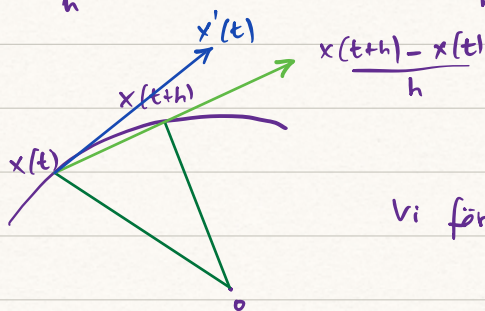
$$x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$



$$\text{Derivata: } x'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, \dots, \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \right) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$



vi förutsätter $x'(t) \neq 0$.

$$\text{Ex: Linje } x = tv + p, \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$x'(t) = v \quad \text{Linjens riktningsvektor.}$$

En parametrisering av en kurva γ är inte unik.

$$\gamma = \{x(t), a \leq t \leq b\} = \{y(s), \alpha \leq s \leq \beta\}.$$

Det finns en unik avbildning $s = \varphi(t)$ sådan att $x(t) = y(s)$, dvs $x(t) = y(\varphi(t))$

Derivatans riktning i en punkt på kurvan är oberoende av parametriseringen ty

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^n}}{x'(t)} = \frac{d}{dt}(x(t)) = \frac{d}{dt}(y(s)) = \frac{d}{ds} y(s) \cdot \frac{ds}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^n}}{y'(s)} \cdot \underset{\substack{>0 \\ \leftarrow \mathbb{R}}}{\varphi'(t)}$$

Linjen $T(t) = x'(t_0)t + x(t_0)$ kallas tangenten till γ i punkten $x(t_0)$.

Ex: (Centralt rörelse) $a, b, k > 0$

Position:

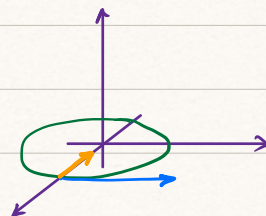
$$r(t) = (a \cos(kt), b \sin(kt), 0)$$

Hastighet:

$$r'(t) = (-ka \sin(kt), bk \cos(kt), 0)$$

Acceleration:

$$r''(t) = (-k^2 a \cos(kt), -bk^2 \sin(kt), 0) = -k^2 r(t)$$



$$r(0) = (a, 0, 0), \quad r'(0) = (0, bk, 0), \quad r''(0) = (-k^2 a, 0, 0).$$

Längden av en kurva.

Låt $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och



$y: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara parametriseringar av kurvan γ .

Låt $s = \varphi(t)$, φ växande, $\varphi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$.

$\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ sådana att $y(s) = y(\varphi(t)) = x(t)$.

$$\begin{aligned} \text{Studera} \quad \int_a^b |x'(t)| dt &= \int_a^b \left| \frac{d}{dt} (y(\varphi(t))) \right| dt = \int_a^b |y'(\varphi(t))| \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int_\alpha^\beta |y'(s)| ds. \end{aligned}$$

Talet $L_\gamma = \int_a^b |x'(t)| dt$ är oberoende av parametriseringen.
Beror av γ .

Givet parametriseringen $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ lät
 $s = \varphi(t) = \int_a^t |x'(u)| du$ vara en ny parameter.

$$\alpha = \varphi(a) = 0, \quad \beta = \varphi(b) = \int_a^b |x'(u)| du = L_\gamma, \quad y(s) = y(\varphi(t)) = x(t).$$

Från analysens huvudsats är $\varphi'(t) = |x'(t)|$.

$$L_\gamma = \int_a^b |x'(t)| dt = \int_0^{L_\gamma} |y'(s)| ds$$

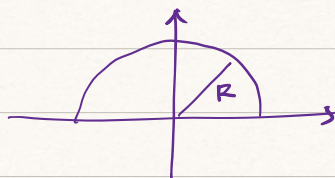
$$\text{Men } |x'(t)| = \left| \frac{d}{dt} (x(t)) \right| = \left| \frac{d}{dt} (y(\varphi(t))) \right|$$

$$= \left| y'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right| = \underbrace{|y'(s)|}_{=1} \cdot \underbrace{|\varphi'(t)|}_{L_\gamma} = |y'(s)| \cdot |x'(t)|$$

$$\text{Ants} \text{ är } |y'(s)| = 1. \quad \text{och} \quad L_\gamma = \int_0^{L_\gamma} ds =: \int_0^\pi ds$$

ds kallas **bågelementet**. L_γ kallas **längden** av γ .

Ex: Beräkna längden av en halvcirkel.



$$x(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

$$L_\gamma = \int_\gamma ds = \int_0^\pi |x'(\theta)| d\theta = \int_0^\pi |(-R \sin \theta, R \cos \theta)| d\theta = \int_0^\pi \sqrt{R^2} d\theta = \underline{\underline{R\pi}}$$

Räkeregler: • $\frac{d}{dt} (c \cdot x(t)) = c \cdot x'(t)$

• $\frac{d}{dt} (x(t) + y(t)) = x'(t) + y'(t)$

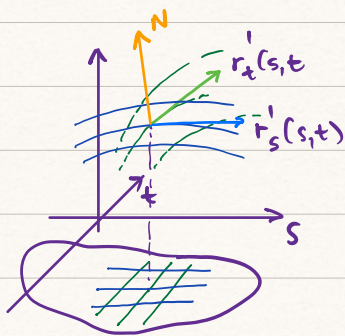
• $\frac{d}{dt} (x(t) \cdot y(t)) = x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t)$
skalärprodukt

(i d=3) • $\frac{d}{dt} (x(t) \times y(t)) = x'(t) \times y(t) + x(t) \times y'(t)$

Över: $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$

$$r(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), x_3(s,t))$$

För fixt s är $\varphi(t) := r(s,t)$ en kurva och
för fixt t är $\varphi(s) := r(s,t)$ en kurva



Om r'_s och r'_t inte är
högst beroende så spänner
de upp ett plan med normal-
vektor

$$N(s,t) = r'_s(s,t) \times r'_t(s,t).$$

Ex: En parametrisering av sfären är

$$r(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi) \quad 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$r'_\theta = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, 0)$$

$$\mathbf{r}'_\varphi = (R \cos \theta \cos \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \varphi)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \varphi \end{vmatrix}$$

$$= R^2 (-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, \underbrace{-\sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi}_{-\sin \varphi \cos \varphi})$$

$$= R^2 \sin \varphi (-\cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \varphi) = -R \sin \varphi \mathbf{r}(\theta, \varphi).$$

Ex: Funktionsyta.

$$z = f(x, y).$$

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (1, 0, f'_x) \times (0, 1, f'_y)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

