F25 Repetition II. (Integraler & Vektoranalys)

$d=2$: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektorfält, $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ riktad kurva

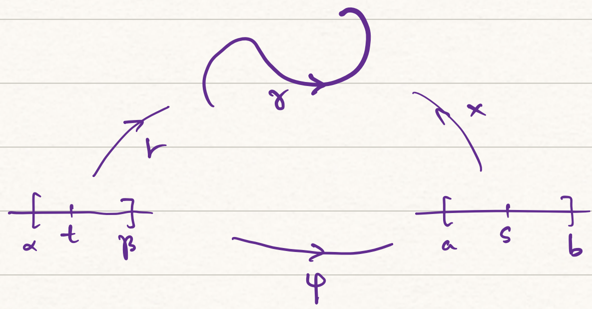
$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$$

där $r : [\alpha, \beta] \to \gamma$ är en parametrisering av γ.

dvs r bijektiv, $r \in C^1$ och $r^{-1} \in C^1$.

$\gamma = \{ r(t) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq t \leq \beta \}$.

HL oberoende av parametrisering.



Vi har $r(\alpha) = x(a)$, $r(\beta) = x(b)$ och $r(t) = x(\varphi(t)) = x(s)$.

$$\int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_a^b F(x(s)) \cdot x'(s)\,ds \quad ?$$

$$\int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F(x(\varphi(t))) \cdot \left(\frac{d}{dt} x(\varphi(t)) \right) dt$$

$$= \int_\alpha^\beta F(x(\varphi(t))) \cdot \Big(\underbrace{x'(\varphi(t))}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{tal}} \Big)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right\}$$

$$= \int_a^b F(x(s)) \cdot x'(s)\,ds.$$

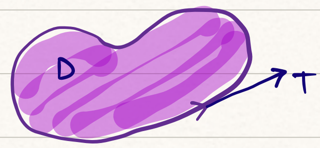
Alternativt $\displaystyle\int_\gamma F\cdot T\, ds$, där ds är bågelementet,

$ds = |r'(t)|\,dt$ för given parametrisering.

$T(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$.

<u>Greens formel:</u>

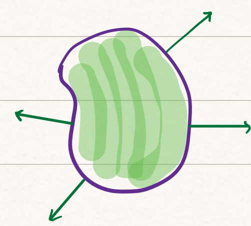
$$\int_{\partial D} F\cdot T\,ds = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy .$$



området på vänster sida om tangenten.

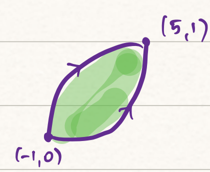
Om $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T$.

$$\underbrace{\int_{\partial D} F\cdot N\,ds}_{\text{Flödet ut ur } \partial D} = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)}_{\text{lokala produktionen.}} dx_1\,dx_2$$



<u>Ex:</u> Visa att $I = \int_C 2x\sin y\,dx + (x^2\cos y - 3y^2)\,dy$ är oberoende av vägen, där C är linjestycket mellan $(-1,0)$ och $(5,1)$.

$P(x,y) = 2x\sin y$, $Q(x,y) = x^2\cos y - 3y^2$



Existerar en potential U sådan att $\nabla U = (P,Q)$?

$U = x^2\sin y + y^3$ $\quad \nabla U = (2x\sin y,\ x^2\cos y + 3y^2)$.

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos y - 2x\cos y = 0$. Eftersom området där F är definierat är enkelt sammanhängande så har F en potential U, och

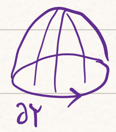
$$I = U(5,1) - U(-1,0).$$

Alltså är I oberoende av vägen.

Utvidgningar till $d=3$

$$\iint_{\partial K} u\cdot N\,dS = \iiint_K \operatorname{div} u\,dx_1dx_2dx_3$$, N utåtriktad, $dS = |r_s'\times r_t'|\,ds\,dt$ oberoende av parametrisering.

$$\int_{\partial Y} u_1dx_1+u_2dx_2+u_3dx_3 = \iint_Y (\operatorname{rot} u)\cdot N\,dS$$ ($N\times T$ ska peka mot Y)



Ex: Låt $u(x,y,z) = (-y, x^2, z)$. Beräkna

$\int_{\partial Y} u\cdot dr$, där $Y = \{(x,y,z) : z = 9-x^2-y^2,\ z\geq 0\}$.

orienterad moturs sett ovanifrån.

Lösning: $\partial Y = \partial Y_1$, där $Y_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 9,\ z=0\}$.

Enligt Stokes sats är

$$\int_{\partial Y_1} u\cdot dr = \iint_{Y_1} (\operatorname{rot} u)\cdot(0,0,1)\,dS = \iint_{x^2+y^2\leq 9} (2x+1)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\leq 9} dx\,dy = \underline{\underline{9\pi}}$$

Alternativt om vi fortsätter att arbeta med Y.

$$\int_{\partial Y} u\cdot dr = \iint_Y (\operatorname{rot} u)\cdot N\,dS = \circledast$$

$$\operatorname{rot} u = \nabla\times u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x^2 & z \end{vmatrix} = (0,0,2x+1).$$

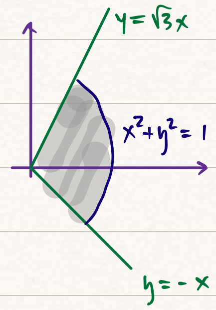
$z = f(x,y) = 9 - x^2 - y^2.$

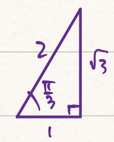
$r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ $\quad N = r_x'\times r_y' = (2x,2y,1)$ från funktionsyta.

$$⊛ = \iint_{x^2+y^2 \le 9} (2x+1)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 9} dx\,dy = \underline{9\pi.}$$

<u>Ex:</u> Beräkna volymen av det område som ges av $0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$ och $-x \le y \le \sqrt{3}x$, $x \ge 0$.

Då $z = 0$:





$$V = \int_0^1 \Big(\iint_{x^2+y^2 \le 1-z} dx\,dy \Big) dz = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sqrt{1-z}} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^1 \Big(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\Big) \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1-z}} dz$$

$$= \frac{7\pi}{24} \int_0^1 (1-z)\,dz = \frac{7\pi}{24} \Big[z - \frac{z^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{7\pi}{48}.$$

<u>Ex:</u> Beräkna $I = \iiint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy\,dz$, där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2 + y^2\}$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^3}\,dz \Big) dx\,dy = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{1+r^6} \int_0^r dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^2}{1+r^6}\,dr\,d\theta = 4\pi \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{r^2}{1+r^6}\,dr = 4\pi \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{r^2}{1+(r^3)^2}\,dr$$

$$= 4\pi \lim_{R\to\infty} \Big[\frac{\arctan(r^3)}{3}\Big]_0^R = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{2\pi^2}{3}.}$$

Ex: Beräkna

$$\iiint_D xz\,dx\,dy\,dz$$

där D ges av $x^2+y^2+4z^2 \le 2$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

Lösning: Vi nyttjar $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ 2z = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. $\quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

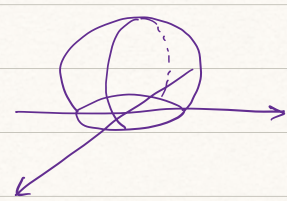
$$\left|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\varphi,\theta)}\right| = \text{abs}\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}\dots & \frac{1}{2}\dots & \frac{1}{2}\dots \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot r^2\sin\theta$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi\sin\theta\cdot\frac{r}{2}\cos\theta\,\frac{1}{2}r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}} r^4\,dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{5/2}}{20}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{15}}}$$

Ex: Låt $u(x,y,z) = (x^2+y+2+z^2,\ e^{x^2}+y^2,\ 3+x)$, $a>0$ och låt S vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = az+3a^2$ som är ovanför xy-planet. Bestäm flödet av u genom S.

Lösning: $S:\quad x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2 = 3a^2+\frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$.



$Y_1:\quad x^2+y^2 \le 3a^2$, $z=0$. $\quad N = (0,0,-1)$.

$$\Phi_1 = \iint_{Y_1} u\cdot N\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 3a^2}(-3-x)\,dx\,dy = -3\iint_{x^2+y^2\le 3a^2}dx\,dy = -3\cdot\pi\,3a^2 = -9\pi a^2.$$

$$\iiint_K \operatorname{div} u\,dx\,dy\,dz = \iiint_K (2x+2y)\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^{\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{13}a}{2}}\Big(\underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 3a^2}(x+y)\,dx\,dy}_{\text{udda}}\Big)\,dz = 0.$$

Alltså gäller $\iint_S u \cdot N \, dS = 9\pi a^2$, ty

$$\iint_{Y_1} u \cdot N \, dS + \iint_S u \cdot N \, dS = \iiint_K \operatorname{div} u \, dx dy dz = 0 .$$