F21 Kurv- och ytintegraler i $\mathbb{R}^3$

Låt $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$, där $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, och γ vara en orienterad kurva i Ω med parametrisering $r: [\alpha, \beta] \to \gamma$.

Kurvintegralen definieras som

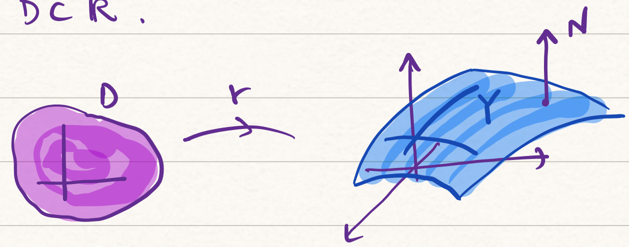
$$\int_\gamma u \cdot dr = \int_\gamma u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 \overset{\text{def.}}{=} \int_\alpha^\beta u(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_\gamma u \cdot T\, ds$$

där ds är bågelementet.

Längden av γ ges av $L = \int_\alpha^\beta |r'(t)|\, dt$.

Ytintegraler:

Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara en yta med parameterframställningen $r: D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}^2$.



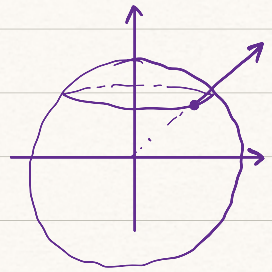
Den sida dit $N(s,t) = r'_s \times r'_t$ pekar sägs vara den positiva sidan.

Ex: $r(\theta, \varphi) = (R\cos\varphi \sin\theta, R\sin\varphi \sin\theta, R\cos\theta)$ är en parametrisering av sfären med radie R.

$$N(\theta,\varphi) = r'_\theta \times r'_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(R^2\cos\varphi\sin^2\theta,\ R^2\sin\varphi\sin^2\theta,\ \underbrace{R^2\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta + R^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta}_{=R^2\sin\theta\cos\theta.}\right)$$

$$= R\sin\theta\,(R\cos\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\theta) = R\sin\theta\ r(\theta,\varphi).$$

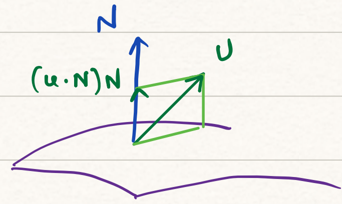


$\underbrace{R\sin\theta}_{\text{tal} > 0} \cdot \underbrace{r(\theta,\varphi)}_{\text{vektor.}}$

N pekar utåt så som den är definierad i exemplet.

$N_1 = r'_\varphi \times r'_\theta = -r'_\theta \times r'_\varphi = -N$ pekar mot origo.

<u>Flödesintegraler:</u> Låt $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ vara ett vektorfält, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
och Y vara en yta i Ω med parametriseringen
$r : D \to Y$.
N enhetsnormal.

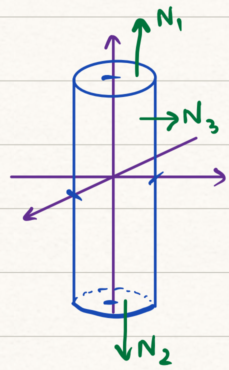


Flödesintegralen definieras som $\Phi = \iint_Y u \cdot N\, dS$

där dS är areaelementet. $dS = |r'_s \times r'_t|\, ds\,dt$

Notera att $N = \dfrac{r'_s \times r'_t}{|r'_s \times r'_t|}$. Alltså $\Phi = \iint_D u(r(s,t)) \cdot (r'_s \times r'_t)\, ds\,dt.$

Ex: Beräkna flödet av fältet $u(x,y,z) = (x,y,z)$ ut ur cylindern $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq a^2, -h \leq z \leq h\}$.



$$\Phi = \iint_{\partial\Omega} u \cdot N \, dS$$

$$= \iint_{Y_1} u \cdot N_1 \, dS + \iint_{Y_2} u \cdot N_2 \, dS + \iint_{Y_3} u \cdot N_3 \, dS$$

$$\Phi_1 = \iint_{Y_1} u \cdot N_1 \, dS = \iint_{Y_1} u \cdot (0,0,1) \, dS$$

$$= \iint_{Y_1} z \, dS = h \iint_{Y_1} dS = \underline{\underline{h\pi a^2}}$$

$$\Phi_2 = \iint_{Y_2} u \cdot N_2 \, dS = \iint_{Y_2} (x,y,z) \cdot (0,0,-1) \, dS = (-h)(-1) \iint_{Y_2} dS = h\pi a^2.$$

Φ_3: En parametrisering av Y_3 är

$r(\theta,t) = (a\cos\theta, a\sin\theta, t)$, $D = \{(\theta,t) : 0 < \theta < 2\pi, -h < t < h\}$

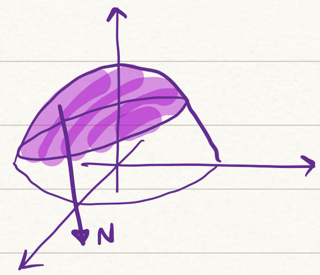
$$N = r'_\theta \times r'_t = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$$

$$\Phi_3 = \iint_{Y_3} u \cdot N \, dS = \iint_D u(r(\theta,t)) \cdot (a\cos\theta, a\sin\theta, 0) \, dS$$

$$= \iint_D (a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) \, dS = a^2 \int_{-h}^{h} \int_0^{2\pi} d\theta \, dt = 4\pi h a^2$$

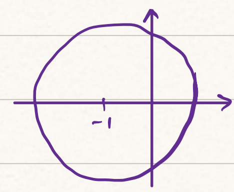
Alltså $\underline{\underline{\Phi = 6\pi h a^2}}$

Ex: Bestäm flödet av $u(x,y,z) = (y^3, z^2, x)$ nedåt genom den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $z = 2x+1$.



Lösning: En parametrisering är

$r(x,y) = (x, y, 4-x^2-y^2)$. $r : D \to Y$.



$$D: \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4 - x^2 - y^2 &= 2x + 1 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 4 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$-r'_x \times r'_y = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = -(2x, 2y, 1)$$

$$\Phi = \iint_Y u \cdot N \, dS = -\iint_{(x+1)^2+y^2 \le 4} (y^3, 4-x^2-y^2, x) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx\,dy$$

$$= -\iint_{(x+1)^2+y^2 \le 4} (\underbrace{2xy^3 + (4-x^2-y^2)2y}_{\text{udda i } y.} + x) \, dx\,dy = -\iint_{(x+1)^2+y^2 \le 4} x \, dx\,dy = -\iint_{x^2+y^2 \le 4} (x-1) \, dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 4} dx\,dy - \underbrace{\iint_{x^2+y^2 \le 4} x \, dx\,dy}_{\text{udda i } x.} = \iint_{x^2+y^2 \le 4} dx\,dy = \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{4\pi}}$$

Ex: Bestäm flödet av $F(x,y,z) = (x, y, z^2)$ upp genom ytan $Y = \{ r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u) : 0 \le u \le 2, 0 \le v \le \pi \}$

Lösning: $r'_u = (\cos v, \sin v, 1)$ $\quad r'_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos v, -u\sin v, u)$$

$r'_u \times r'_v$ pekar uppåt eftersom $0 \le u \le 2$.

$$\Phi = \iint_Y F \cdot N\,dS = \int_0^2 \int_0^\pi (u\cos v, u\sin v, u^2) \cdot (-u\cos v, -u\sin v, u)\,dv\,du$$

$$= \int_0^2 \int_0^\pi (-u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v + u^3)\,dv\,du = \pi \int_0^2 (u^3 - u^2)\,du = \pi \left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \pi\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}.$$

5. (4 poäng) Temperaturen i en punkt (x, y, z) i rummet ges av funktionen

$$T(x, y, z) = z^2 - xy.$$

Värmeflödet beskrivs av vektorfältet $\mathbf{v} = -k\nabla T$, där $k > 0$ är en konstant. Bestäm takten med vilken värme flödar genom ytan Σ, dvs bestäm värdet av dubbelintegralen

$$\int_\Sigma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

där Σ är ytan i $\mathbb{R}^3$ som ges i cylindriska koordinater (r, φ, z) av

$$\Sigma: \ 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad z = \varphi,$$

orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

$v = -k\nabla T = -k(-y, -x, 2z) = k(y, x, -2z)$

$s(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$, där $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, är en parametrisering av Σ.

$$v = -k\nabla T = k(r\sin\varphi, r\cos\varphi, -2\varphi)$$

$$s'_r \times s'_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = (\sin\varphi, -\cos\varphi, r)$$

$$\iint_\Sigma v \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} k(r\sin\varphi, r\cos\varphi, -2\varphi) \cdot (s'_r \times s'_\varphi)\, d\varphi\, dr$$

$$= k\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi - 2r\varphi)\, d\varphi\, dr = k\int_0^{2\pi} (-\cos 2\varphi - 2\varphi)\, d\varphi \cdot \int_0^1 r\, dr$$

$$= -\frac{k}{2}\int_0^{2\pi} 2\varphi\, d\varphi = -\frac{k}{2}\left[\varphi^2\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-k2\pi^2}}$$