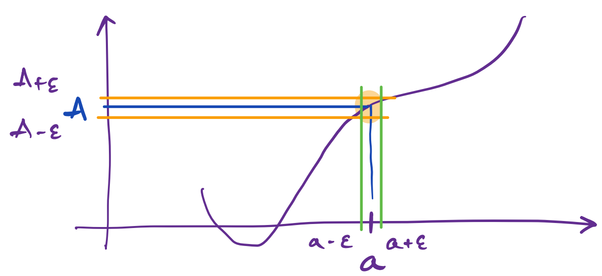
2 Gränsvärden:

d = 1: Låt f vara en reelvärd funktion, $D_f \subset \mathbb{R}$ sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f konvergerar mot $A \in \mathbb{R}$ då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att

$|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$.

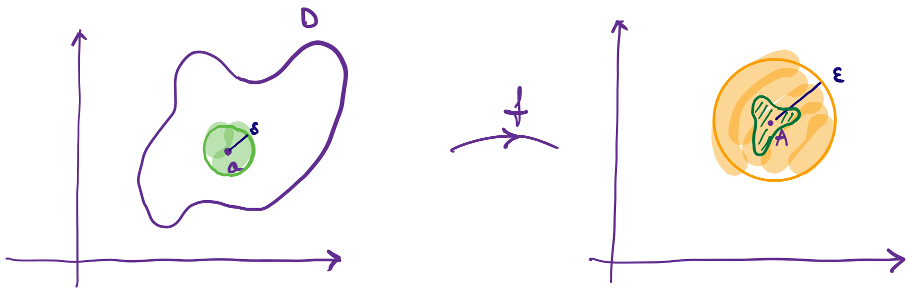


Då $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

$$y = f(x) \iff \begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \vdots \\ y_p = f_p(x) \end{cases} \quad \text{där } f_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

I linjär algebra är f en matris.

Definition Låt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Låt $a \in \overline{D} = D \cup \partial D$. Vi säger att $f(x)$ konvergerar mot $A \in \mathbb{R}^p$ då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$.



Ex: Använd definitionen för att visa att $\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x+y^2) = 13$

Lösning: Vi vill visa att för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att $|2x+y^2-13| < \varepsilon$ för varje $0 < |(x,y)-(2,3)| < \delta$.

Notera att $0<|(x,y)-(2,3)|<\delta$ betyder $0<\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}<\delta$.

$$|2x+y^2-13| = |2x-4+y^2-9| \le 2|x-2| + |y^2-9| = 2|x-2|+|y+3|\cdot|y-3|$$

om $\delta < 1$. (då är $|y+3|<4$)

$$< 2|x-2| + 4\cdot|y-3| = 2\sqrt{(x-2)^2} + 4\sqrt{(y-3)^2} \le 6\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} < 6\delta.$$

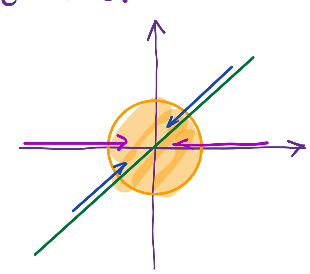
$6\delta \le \varepsilon$ då $\delta \le \frac{\varepsilon}{6}$. Välj därför $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)$.

Ex: Visa att $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ saknar gränsvärde i $(0,0)$.

Lösning: Låt först $x=t$, $y=0$ och låt $t\to 0$.

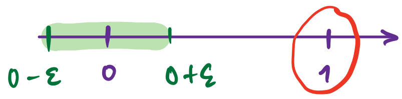
$$f(t,0) = \frac{2\cdot t\cdot 0}{t^2+0^2} = 0 \to 0, \text{ då } t\to 0.$$

Låt nu $x=y=t$ och låt $t \to 0$.



$$f(t,t) = \frac{2t^2}{2t^2} = 1 \to 1, \text{ då } t\to 0.$$

Ska A väljas till 0 eller 1? Omöjligt.



<u>Sats</u>: Låt f, g och h vara funktioner definierade på $D \subset \mathbb{R}^n$ med värden i $\mathbb{R}^p$. Låt $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a} g(x) = B$. Då gäller

i) $\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$.

ii) Om $p = 1$: $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B$

iii) Om $p = 1$: $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

om även $\lim_{x \to a} h(x)$ existerar så gäller att

iv) om $p = 1$: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x$ i en omgivning av a så gäller att $A \leq \lim_{x \to a} h(x) \leq B$.

<u>Bevis</u>: i) Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $\lim_{x \to a} f(x) = A$ och $\lim_{x \to a} g(x) = B$

så finns det $\delta_f > 0$ och $\delta_g > 0$ så dana att

$$\begin{cases} |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, & \text{då } 0 < |x - a| < \delta_f \\ |g(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, & \text{då } 0 < |x - a| < \delta_g . \end{cases}$$

Alltså gäller att $|f(x)+g(x)-A-B| \leq |f(x)-A|+|g(x)-B|$
$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ då $0<|x-a|< \min(\delta_f, \delta_g)$.

Ex: Bestäm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

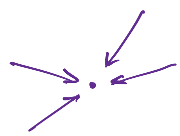
Byt koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r^2 \ln r^2 = \lim_{t\to 0+} t\ln t = \left\{ s = \frac{1}{t} \right\}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\ln\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{-\ln s}{s} = 0 \quad \text{(Standardgränsvärde)}$$

Ex: (Jobbigt resultat)

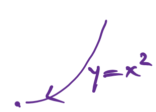
Betrakta $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$.



Bestäm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ för alla (x,y) som uppfyller att $y=kx$.

Låt $x=t$, $y=kt$, $t\to 0$.

$$f(t,kt) = \frac{2kt^3}{t^4+k^2t^2} = \frac{2kt}{t^2+k^2} \to 0, \text{ då } t\to 0$$



Men $f(t,t^2) = \dfrac{2t^4}{t^4+t^4} = 1 \to 1$, då $t\to 0$.

Alltså saknar $f(x)$ gränsvärde då $x\to(0,0)$.

Ex: Visa att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

Lösning: $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x^2y|}{|x^2+y^2|} \le \frac{|x^2+y^2|\cdot|y|}{|x^2+y^2|} = |y| = \sqrt{y^2}$

$\le \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, då $(x,y)\to(0,0)$.

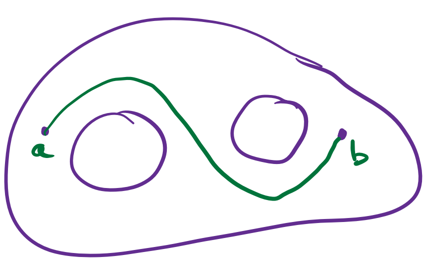
Definition: Vi säger att $f(x)\to B$, då $|x|\to\infty$ om det till varje $\varepsilon>0$ finns ett ω sådant att $|f(x)-B|<\varepsilon$, för varje $|x|>\omega$.

Definition: Låt $f: D\to\mathbb{R}^p$, $D\subset\mathbb{R}^n$. Vi säger att f är kontinuerlig i $x=a\in D$ om

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Sats: Om f är reellvärd, kontinuerlig funktion med kompakt definitionsmängd D_f så har f ett största och minsta värde på D_f.

En mängd Ω sägs vara bågvis sammanhängande om det till varje par $a,b\in\Omega$ finns en kontinuerlig kurva $t\mapsto x(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ sådan att $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ och $x(t)\in\Omega$.



Satsen om mellanliggande värde:

Låt f vara en kontinuerlig reellvärd funktion på bågvis sammanhängande mängd D. Om f antar värdena A och B så antar f alla värden mellan A och B.

Bevis: Bilda $t \longmapsto f(x(t))$ och applicera envariabelanalys.