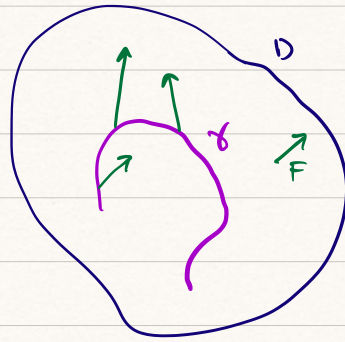
F19 Greens formel och Gauss sats

Enligt tidigare: Låt γ vara en kurva och $r:[a,b]\to\gamma$ vara en parametrisering av γ. Låt $F: D\to\mathbb{R}^2$ vara ett vektorfält och $F=(P,Q)$, $\gamma\subset D$.



Kurvintegralen $\int_\gamma F\cdot dr=\int_\gamma P\,dx+Q\,dy$

definieras som $\int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$

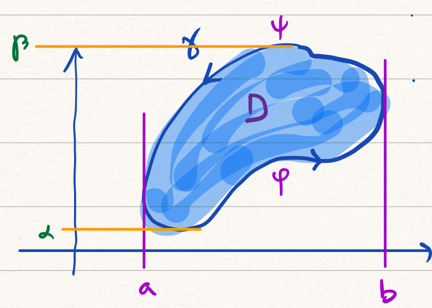
Om $r(t)=(x(t),y(t))$ så kan vi skriva

$$\int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt=\int_a^b \left(P(x,y),Q(x,y)\right)\cdot\left(x'(t),y'(t)\right)dt$$

$$=\int_a^b \left(P(x,y)x'(t)+Q(x,y)y'(t)\right)dt \qquad \left(dx=x'(t)dt,\ dy=y'(t)dt\right)$$

Greens formel: Låt $\varphi,\psi\in C^1([a,b])$ och låt

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\varphi(x)\le y\le\psi(x),\ a\le x\le b\}$.



$\gamma=\partial D$ orienterad så att området är på vänster sida, vilket vi kallar positiv orientering.

Vi har att $\gamma=\gamma_1-\gamma_2$ där $\gamma_1=\{(t,\varphi(t)):a\le t\le b\}$

$\gamma_2=\{(t,\psi(t)):a\le t\le b\}$

Dela upp vektorfältet enligt $(P,Q) = (P,0) + (0,Q)$ och studera

$$\int_\gamma (P,0)\cdot dr = \int_{\gamma_1} (P,0)\cdot dr - \int_{\gamma_2} (P,0)\cdot dr =$$

$$= \int_a^b \big(P(t,\varphi(t)),0\big)\cdot(1,\varphi'(t))\,dt - \int_a^b \big(P(t,\psi(t)),0\big)\cdot(1,\psi'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b \big(P(t,\varphi(t)) - P(t,\psi(t))\big)\,dt = -\int_a^b \big(P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\big)\,dx$$

$$= -\int_a^b \big[P(x,y)\big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\,dx = -\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx$$

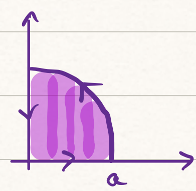
Analogt kan man visa att $\int_\gamma (0,Q)\cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$.

Greens formel: Låt $F = (P,Q)$ vara ett C^1-fält definierat på den kompakta mängden D och låt $\gamma = \partial D$ vara en styckvis C^1-kurva med positiv orientering.
Då gäller att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Ex: Beräkna $I = \int_\gamma (x - y^3)\,dx + (y^3 + x^3)\,dy$, $\gamma = \partial D$ positivt orienterad

$$D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$$



Lösning: Enligt Greens formel är

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$P(x,y) = x - y^3$

$Q(x,y) = y^3 + x^3$

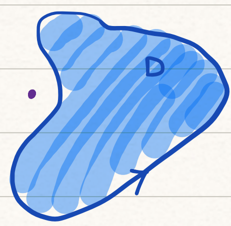
$$I = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^3\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \underline{\underline{\frac{3\pi a^4}{8}}}.$$

Ex: (Magnetfält) $B = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

a) Visa att $\int_{\partial D} B \cdot dr = 0$ för varje kompakt område som ej innehåller origo.

b) Visa att $\int_\gamma B \cdot dr = 2\pi$ för varje sluten kurva γ som går ett varv runt origo i positiv riktning.

Lösning: a)

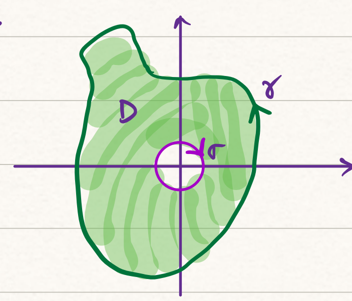


$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2 - 2x^2 - (-x^2 - y^2 + 2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Alltså från Greens formel $\int_{\partial D} B \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0.$

b) Låt γ vara en kurva runt origo.



Låt D vara det inre av γ förutom de punkter inom $B_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < \varepsilon^2\}$.

Låt $\sigma = \partial B_\varepsilon$. Sedan tidigare har vi att $\int_{-\sigma} B \cdot dr = 2\pi$

$$\int_\gamma B \cdot dr + \int_\sigma B \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0 \Rightarrow \int_\gamma B \cdot dr = -\int_\sigma B \cdot dr = \underline{2\pi}$$

Area med Greens formel:

Låt D vara ett kompakt område med C^1-rand.

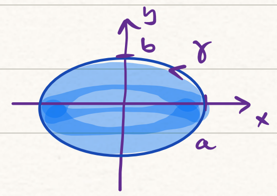
$$\int_{\partial D} (-y)\,dx = \int_{\partial D} (-y,0)\cdot(dx,dy) = \iint_D (0-(-1))\,dx\,dy = \mu(D)$$

$$\int_{\partial D} x\,dy = \int_{\partial D} (0,x)\cdot(dx,dy) = \iint_D (1-0)\,dx\,dy = \mu(D).$$

Alltså $\mu(D) = \int_{\partial D} (-y)\,dx = \int_{\partial D} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y)\,dx + x\,dy$

Ex: Beräkna arean av den elliptiska skivan

$$E = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$



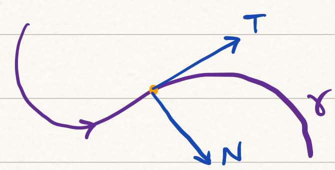
Lösning: $\mu(E) = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y)\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)\cdot dr = (*)$

γ har parametriseringen $r(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

$$(*) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin\theta, a\cos\theta)\cdot(-a\sin\theta, b\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta\right)d\theta = \underline{\underline{\pi ab}}.$$

Flöde: Låt $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett vektorfält och γ en orienterad C^1-kurva.



$N = RT$, där $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Vi definierar flödesintegralen av u över γ som

$$\int_\gamma u\cdot N\,ds.$$

Notera att $\displaystyle\int_\gamma u\cdot N\,ds = \int_\gamma u\cdot (RT)\,ds = \int_\gamma (R^t u)\cdot T\,ds$

$$= \int_\gamma \begin{pmatrix}-u_2\\ u_1\end{pmatrix}\cdot T\,ds = \int_\gamma -u_2\,dx + u_1\,dy.$$

Låt D vara ett kompakt område med C^1-rand $\gamma = \partial D$. Om nu $u\in C^1(D)$ så gäller Greens formel och vi får

$$\int_\gamma u\cdot N\,ds = \int_\gamma -u_2\,dx + u_1\,dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)}_{\text{lokala produktionen}} dx\,dy \qquad \text{(Gauss sats)}$$

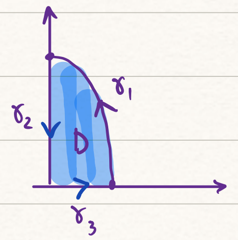
Ex: En partikel rör sig längs ellipsen $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ från $(1,0)$ till $(0,2)$ i kraftfältet $F=(y^3, x^3)$. Beräkna det arbete som uträttas.

Lösning: Arbetet ges av $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dr$, där

En parametrisering är $r(\theta)=(\cos\theta, 2\sin\theta)$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$\int_\gamma F\cdot dr = \int_0^{\pi/2} (8\sin^3\theta, \cos^3\theta)\cdot(-\sin\theta, 2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (-4\sin^4\theta + \cos^4\theta)\,d\theta = \ldots \text{ hm svårt.}$$



$\gamma_2: \ r(t) = (0, 2-t), \quad 0 \le t \le 2$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dr = \int_0^2 F(0, 2-t) \cdot (0,-1)\, dt$$

$$= \int_0^2 \left((2-t)^3, 0\right)(0,-1)\, dt = 0$$

$\gamma_3: \ r(t) = (t, 0), \quad 0 \le t \le 1.$

$$\int_{\gamma_3} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_0^1 (0, t^3)(1,0)\, dt = 0.$$

Låt $\gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

$$\int_{\gamma_4} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) \right) dx\,dy = 3 \iint_D (x^2 - y^2)\, dx\,dy$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \end{array} \right\} = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 (\cos^2\theta - 4\sin^2\theta)\, 2r\, dr\, d\theta$$

$$= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5\sin^2\theta)\, d\theta \cdot \int_0^1 r^3\, dr = \frac{3}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5\sin^2\theta)\, d\theta.$$

$$\left[\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \quad \sin^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{5}{2} - \frac{5\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{3}{2} \left[-\frac{3\theta}{2} - \frac{5}{2} \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{9\pi}{8}.$$