

F18 Kurvintegraler

Låt γ vara en orienterad kurva i $\mathbb{R}^2$ med parametriseringen $r = r(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.



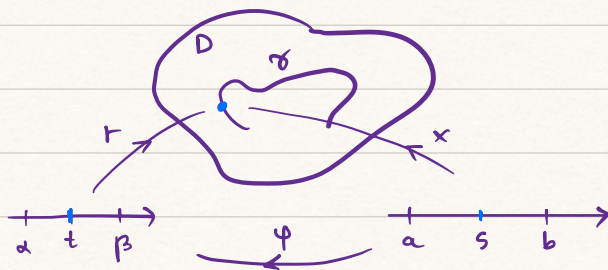
Vi har sedan tidigare att längden av γ ges av

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{\alpha}^{\beta} |r'(t)| dt \quad \text{som är oberoende av parametriseringen.}$$

Vektorfält: Låt $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $\gamma \subset D$ vara en kurva med de bijektiva parametriseringarna $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \gamma$ och $x: [a, b] \rightarrow \gamma$

Sats:

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(r(t)) \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{skalärprodukt}}}{r'(t)} dt = \int_a^b F(x(s)) \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{skalärprodukt}}}{x'(s)} ds$$



Bevis: Låt $\varphi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ vara sådan att $\varphi(s) = t$ givet att $r(t) = x(s)$.

Från kedjeregeln $x'(s) = \frac{d}{ds}(x(s)) = \frac{d}{ds}(r(\varphi(s)))$

$$= \underbrace{r'(\varphi(s))}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{\varphi'(s)}_{\text{tal}}$$

Därmed är

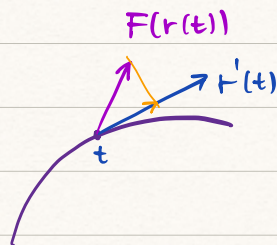
$$\begin{aligned} HL &= \int_a^b F(x(s)) \cdot x'(s) ds = \int_a^b F(r(\varphi(s))) \cdot r'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) ds \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(s) \\ dt = \varphi'(s) ds \end{array} \right\} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = VL \quad \square \end{aligned}$$

Vi inför notationen $\int_{\gamma} F \cdot dr$ för kurvintegralen av F över γ .

Alternativt om $F = (P, Q)$ och $dr = (dx, dy)$

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\gamma} (P, Q) \cdot (dx, dy)$$

Notera:



Endast bidrag från den del av vektorfältet som går i kurvans riktning.

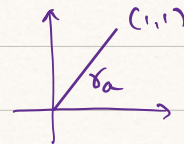
$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot \boxed{\frac{r'(t)}{|r'(t)|}} |r'(t)| dt$$

$$= \int_a^b F(r(t)) \cdot \overset{T}{} dt \quad ds, \text{ där } ds = |r'(t)| dt \text{ är bågelementet}$$

Ex: Låt $F(x,y) = (y^2, 2xy)$. Bestäm kurvintegralen $\int_{\gamma} F \cdot dr$ där γ är

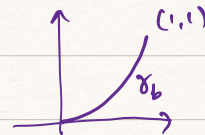
- a) linjen från $(0,0)$ till $(1,1)$
- b) längs $y = x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$

- a) Bilda $r(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$
 $F(r(t)) = F(t, t) = (t^2, 2t^2)$
 $r'(t) = (1, 1)$



$$\int_{\gamma_a} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1$$

- b) Bilda $r(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$
 $F(r(t)) = F(t, t^2) = (t^4, 2t^3)$
 $r'(t) = (1, 2t)$



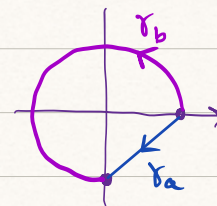
$$\int_{\gamma_b} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1.$$

Ex: Låt $F(x,y) = (y, -x)$ från $(1,0)$ till $(0,-1)$

- a) längs en rät linje
- b) längs enhetscirkeln moturs

Lösning:

- a) $r(t) = (1-t, -t)$, $0 \leq t \leq 1$
 $F(r(t)) = F(1-t, -t) = (-t, t-1)$
 $r'(t) = (-1, -1)$



$$\int_{\gamma_a} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 (-t, t-1) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 (t - t + 1) dt = 1$$

b) $r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_b} F \cdot dr &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} F(r(\theta)) \cdot r'(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin \theta, -\cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\theta = - \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}} . \end{aligned}$$

Kurvintegraler beror av vägen. (ibland inte som vi kommer att se senare).

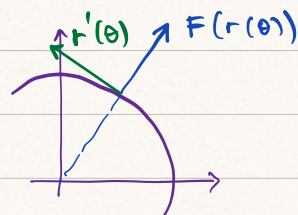
Ex: (Elektriskt fält)

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) , \quad (x, y) \neq (0, 0) .$$

Beräkna $\int_{\gamma_R} F \cdot dr$, där γ_R är cirkeln med radie R moturs.

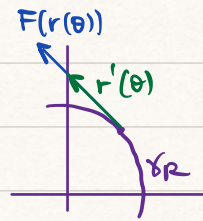
$$r(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta) , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(R \cos \theta, R \sin \theta) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R \cos \theta}{R^2}, \frac{R \sin \theta}{R^2} \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$



Ex: (Magnetfält)

$$B(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$



Beräkna $\int_{\gamma_R} B \cdot dr$ där γ_R är cirkeln med radie R moturs.

$$r(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

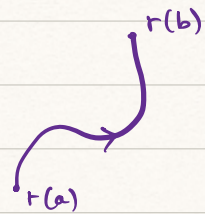
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} B \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R \sin \theta}{R^2}, \frac{R \cos \theta}{R^2} \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

Ex: En partikel med massan m rör sig i ett kraftfält F längs kurvan γ . Enligt Newtons andra lag är

$$F = m \cdot a = m \cdot r''(t), \quad \text{där } r(t) \text{ beskriver positionen vid tiden } t.$$

Arbetet som utförs ges av $\int_{\gamma} F \cdot dr$ (Kraften $\cdot$ sträckan)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b m r''(t) \cdot r'(t) dt \\ &= m \int_a^b (r_1''(t) r_1'(t) + r_2''(t) r_2'(t)) dt \end{aligned}$$



$$= m \left[\frac{r_1'(t)^2}{2} + \frac{r_2'(t)^2}{2} \right]_a^b = m \left[\frac{|r'(t)|^2}{2} \right]_a^b = \frac{m|r'(b)|^2}{2} - \frac{m|r'(a)|^2}{2}$$

vilket är skillnaden i kinetisk energi.