F12 Optimering med bivillkor

Inledande exempel: Bestäm minsta avståndet från $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ till origo.

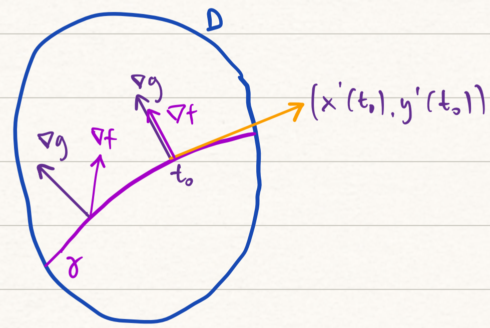
Vi vill alltså minimera avståndsfunktionen $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$d:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ men endast

för de (x,y) som ligger på nivåkurvan $g(x,y)=y-\frac{1}{1+x^2}=0$.

Låt $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(D)$. Vi vill bestämma extremvärden för f givet bivillkoret $g(x,y)=0$.

Låt $\gamma = \{(x,y) \in D : g(x,y)=0\}$.



Antag att $(\nabla g)(x,y) \neq 0$ för alla $(x,y) \in \gamma$.

Implicita funktionssatsen ger att det finns en parametrisering av γ: $\varphi(t)=(x(t),y(t))$, där $\varphi \in C^1$.

Antag att $f: \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ har ett extremvärde för $t=t_0$, $(a,b):=\varphi(t_0)$. Alltså måste $(f\circ\gamma)'(t_0)=0$.

$$\frac{d}{dt}\left(f(\varphi(t))\right)\Big|_{t=t_0} = \left(f'_x(\varphi(t))\cdot x'(t) + f'_y(\varphi(t))\cdot y'(t)\right)\Big|_{t=t_0} = (\nabla f)(a,b)\cdot(x'(t_0),y'(t_0))$$

Alltså är både ∇f och ∇g ortogonala mot γ i en extrempunkt. I $\mathbb{R}^2$ ger det att ∇f och ∇g är linjärt beroende, dvs $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ sådant att

$$\boxed{(\nabla f)(a,b) = \lambda \cdot (\nabla g)(a,b).}$$

Sats: (Lagranges multiplikatormetod)
Låt $f, g \in C^1$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$, $D_g \subset \mathbb{R}^2$ vara reellvärda funktioner.
I en inre punkt $(a,b) \in D_f \cap D_g$ som löser problemet att maximera eller minimera f under bivillkoret $g(x,y) = 0$.
gäller att det finns ett $\lambda \in \mathbb{R}$ sådant att

$$(\nabla f)(a,b) = \lambda \cdot (\nabla g)(a,b).$$

Anmärkning:
$$\begin{cases} (\nabla f)(x,y) = \lambda (\nabla g)(x,y) & \text{(2 ekv.)} \\ g(x,y) = 0 & \text{(1 ekv.)} \end{cases}$$
ger 3 ekvationer med 3 obekanta.

Ex: Bestäm max och min för funktionen
$f(x,y) = x + 2y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 4$

Lösning: $(\nabla f)(x,y) = (1,2)$
$(\nabla g)(x,y) = (2x, 8y)$

$$\begin{cases} (\nabla f)(x,y) = \lambda (\nabla g)(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ 2 = \lambda 8y \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

(Notera att $x \neq 0$ från ekv 1)

$(1): \ \lambda = \frac{1}{2x}$, insatt i (2): $\ 2 = \frac{8y}{2x} \iff x = 2y$

insatt i (3): $\ (2y)^2 + 4y^2 = 4 \iff 2y^2 = 1 \iff y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

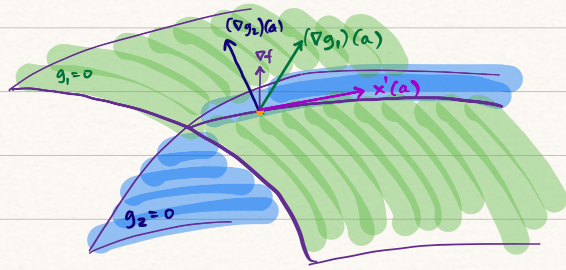
Vi får punkterna $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(-\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$f\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $f\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

$\underline{\max f = 2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\underline{\min f = -2\sqrt{2}}$

Fler bivillkor

$f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$



Vi söker extrempunkter av f på snittet av nivåytorna $g_1(x,y) = 0$ och $g_2(x,y) = 0$.
Vi antar att $(\nabla g_1)(x,y)$ inte är parallell med $(\nabla g_2)(x,y)$.

Snittet definierar en kurva γ med parametrisering $x = x(t)$ med $x(t_0) = a$. $(f \circ x)(t) = f(x(t))$ är då en envariabelfunktion med $\left.\frac{d}{dt}(f(x(t)))\right|_{t=t_0} = 0$.

Kedjeregeln: $\quad (\nabla f)(a) \cdot x'(a) = 0$

Vi har att $(\nabla f)(a)$, $(\nabla g_1)(a)$, $(\nabla g_2)(a)$ är alla ortogonala mot $x'(a)$, dvs de måste vara linjärt beroende.

Antså det finns λ_1 och λ_2 sådana att

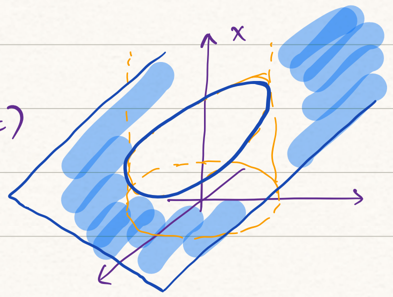
$$\boxed{(\nabla f)(a) = \lambda_1 (\nabla g_1)(a) + \lambda_2 (\nabla g_2)(a).}$$

Ex: Planet $x+y+z=2$ skär cylindern $y^2+z^2=4$. Bestäm den punkt på skärningen som ligger närmast origo.

Lösning: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (avståndet i kvadrat)

$g_1(x,y,z) = x+y+z = 2$

$g_2(x,y,z) = y^2+z^2 = 4$.



I en extrempunkt gäller att $(\nabla f)(a) = \lambda_1 (\nabla g_1)(a) + \lambda_2 (\nabla g_2)(a)$.

$(\nabla f) = (2x, 2y, 2z)$

$(\nabla g_1) = (1,1,1)$

$(\nabla g_2) = (0, 2y, 2z)$

Antså $\begin{cases} 2x = \lambda_1 \\ 2y = \lambda_1 + \lambda_2 2y \\ 2z = \lambda_1 + \lambda_2 2z \end{cases}$

(1): $\lambda_1 = 2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2y = 2x + \lambda_2 2y \\ 2z = 2x + \lambda_2 2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x + \lambda_2 y \\ z = x + \lambda_2 z \end{cases}$

(1) − (2): $\quad y - z = \lambda_2 (y-z) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_2 - 1)(y-z) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_2 = 1$ eller $y = z$.

Om $\lambda_2 = 1$: (1): $y = x + y \Rightarrow x = 0$ och $\lambda_1 = 0$

Vi har även $\begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$.

Fall 1, då $x=0$: $\begin{cases} x=0 \\ x+y+z=2 \\ y^2+z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+z=2 \\ y^2+z^2=4 \end{cases}$

(2) ger $y = 2-z$ insatt i (3): $(2-z)^2 + z^2 = 4$

$z^2 - 4z + 4 + z^2 = 4$

$2z(z-2) = 0 \Rightarrow z=0$ eller $z=2$

Vi får punkterna $(0,2,0)$ och $(0,0,2)$

$f(0,2,0) = 4 = f(0,0,2)$

Fall 2, då $y=z$: $\begin{cases} y=z \\ x+y+z=2 \\ y^2+z^2=4 \end{cases}$

(1) insatt i (3): $2z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}$

Då $y = z = \sqrt{2}$

(2): $x = 2-y-z = 2-2\sqrt{2}$

Då $y = z = -\sqrt{2}$

$x = 2+2\sqrt{2}$.

$$f(2+2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})^2 + 4 = 4 + 8\sqrt{2} + 8 + 4 = 16 + 8\sqrt{2}$$

$$f(2-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2})^2 + 4 = 4 - 8\sqrt{2} + 8 + 4 = 16 - 8\sqrt{2}.$$

Svar:

Största avståndet är $\sqrt{16+8\sqrt{2}}$ och minsta avståndet är 2.

(Notera $16 - 8\sqrt{2} = 4(4 - 2\sqrt{2}) > 4(4 - 2\cdot\frac{3}{2}) = 4$)

Alternativ:

$$0 = \begin{vmatrix} — \nabla f — \\ — \nabla g_1 — \\ — \nabla g_2 — \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

$$= 2x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2y & 2z-2y \end{vmatrix} = 2x(2z - 2y) = 0$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ eller $y = z$.

Inledande exempel: $g(x,y) = y - \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f = (2x, 2y), \quad \nabla g = \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}, 1\right)$$

$$\begin{cases} (\nabla f) = \lambda(\nabla g) \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ 2y = \lambda \\ y - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(1+x^2)^2 = 4xy \\ y = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

(2) insatt i (1) : $x(1+x^2)^2 = 2x \frac{1}{1+x^2}$

$x = 0$ eller $(1+x^2)^3 = 2$

$x^2 = 2^{\frac{1}{3}} - 1$

$x = \pm \sqrt{2^{1/3} - 1}$.