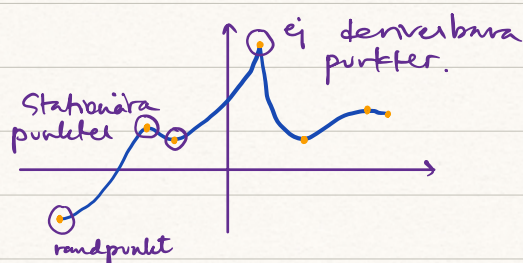


F11 Optimering

Låt K vara en kompakt mängd (stuten & begränsad) och låt $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig.

Enligt tidigare sats har f ett största och minsta värde på K . Var?

Ex: $d=1$



Vi vet från tidigare sats att om f har ett extremvärde i a och f är partiellt deriverbar i a så gäller $(\nabla f)(a) = 0$

Alltså max och min för f kan endast finnas på följande ställen:

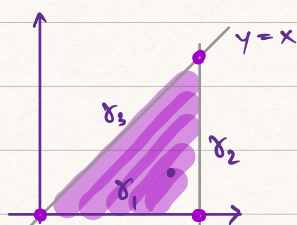
- Stationära punkter
- Ej deriverbara punkter
- Randpunkter (kurvor och hörn)

Ex: Bestäm det största och minsta värde

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-2x-y} \quad \text{antav i mängden}$$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$$

Lösning: K :



$$\text{Stationära punkter: } \begin{cases} f'_x = 2xe^{-2x-y} + (x^2+y^2)e^{-2x-y} \cdot (-2) = 0 \\ f'_y = 2ye^{-2x-y} + (x^2+y^2)e^{-2x-y} \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ 2y - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad (2) - \frac{1}{2}(1): \quad 2y - x = 0 \Leftrightarrow x = 2y.$$

$$\text{Insätt i (2): } 2y - 5y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ eller } y = \frac{2}{5}.$$

$$5y\left(\frac{2}{5} - y\right) = 0$$

Ansän är $\underbrace{y=0, x=0}_{\text{randpunkt.}}$ eller $y = \frac{2}{5}, x = \frac{4}{5}.$

$$f\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) e^{-\frac{8}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{e^{-2}}{25} (16 + 4) = \underline{\underline{\frac{e^{-2}}{5}}}$$

Ej derivibara punkter: saknas.

Kanten:

$$\text{Hörn: } f(0,0) = \underline{\underline{0}}, \quad f(1,1) = \underline{\underline{2e^{-3}}}, \quad f(1,0) = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

Kanterna:

$$\gamma_1: x=t, y=0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\varphi_1(t) := f(t,0) = t^2 e^{-2t}$$

Behöver endast kolla stationära punkter

$$\varphi'_1(t) = 2te^{-2t} - 2t^2 e^{-2t} = 2te^{-2t}(1-t) = 0 \Leftrightarrow t=0 \text{ eller } t=1$$

Ej inre punkter av kanten.

$$\gamma_2: x=1, y=t, 0 \leq t \leq 1$$

$$\varphi_2(t) := f(1,t) = (1+t^2)e^{-2-t}$$

$$\varphi_2'(t) = 2te^{-2-t} - (1+t^2)e^{-2-t} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$$

inre stationära punkter saknas.

$$\gamma_3: x=y=t, 0 \leq t \leq 1.$$

$$\varphi_3(t) := f(t,t) = 2t^2e^{-3t}$$

$$\varphi_3'(t) := 4te^{-3t} - 6t^2e^{-3t} = 0 \Leftrightarrow 2te^{-3t}(2-3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

$$\varphi_3\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{4}{9} e^{-2} = \frac{8e^{-2}}{9}$$

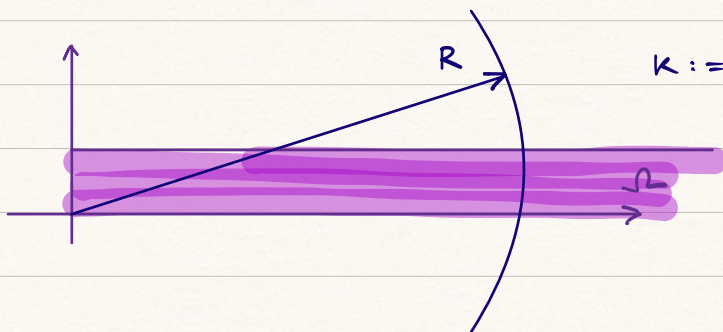
Kandidater: $\frac{e^{-2}}{5}, 0, 2e^{-3}, e^{-2}, \frac{8e^{-2}}{9}$

Minsta värde $\min_{(x,y) \in K} f(x,y) = 0$

Största värde $\max_{(x,y) \in K} f(x,y) = \frac{1}{e^2}$

$$\left(\frac{2}{e^3} = \frac{2}{e} \cdot \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e^2} \right)$$

Optimering på icke-kompakta mängder.



$$K := \Omega \cap B_R, M := \Omega \setminus B_R$$

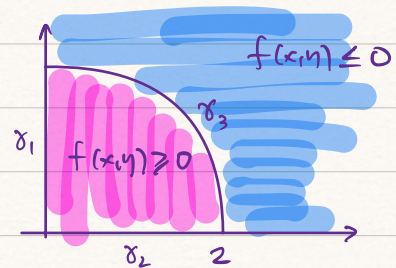
Ide': Optimera $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Kolla på $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ Här är K kompakt så
max och min existerar.

Kontrollera $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex: Låt $f(x,y) = xy(4-x^2-y^2)$. Avgör om f har ett största och
minsta värde i $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Beräkna i så
fall dessa.

Lösning: Notera att om $x^2 + y^2 < 4$
är $f(x,y) > 0$
och om $x^2 + y^2 > 4$ är $f(x,y) < 0$.



$$K = \{(x,y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Funktionsens maxvärde finner vi i K .

Hörn: $f(0,0) = f(4,0) = f(0,4) = 0$

Kanter:

$$\begin{aligned} \gamma_1: f(0,t) &= 0, & 0 \leq t \leq 4 \\ \gamma_2: f(t,0) &= 0, & 0 \leq t \leq 4 \\ \gamma_3: f(2\cos\theta, 2\sin\theta) &= 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Stationära punkter:

$$\begin{aligned} f'_x &= y(4-x^2-y^2) + xy(-2x) \\ &= y(4-3x^2-y^2) \\ f'_y &= x(4-x^2-3y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 4 - x^2 - 3y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - 3(2): \quad 4 - 12 - y^2 + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 8y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 1$$

Punkten $(1,1)$ är den enda stationära punkten.

$$f(1,1) = 4 - 1 - 1 = \underline{\underline{2}} \quad \text{vilket är funktionens största värde}$$

Studera nu f på $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$.

Låt $x = y = t$,

$$\varphi(t) := f(t,t) = t^2(4 - 2t^2) = -2t^4 + 4t^2 \rightarrow -\infty, \text{ då } t \rightarrow \infty.$$

Antsän kan f inte ha ett minsta värde.

Ex: Låt $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$. Bestäm största och minsta

värde för f i $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Lösning: Låt $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$f(x,y) = g(r,\theta) \quad \text{på } \mathcal{R}_g = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

$$\text{Bildan } \varphi_r(\theta) = g(r,\theta) = \frac{r \cos \theta}{1+r^2}.$$

$$\frac{r \cos \frac{\pi}{2}}{1+r^2} = 0 \leq \varphi_r(\theta) \leq \frac{r}{1+r^2} = \frac{r \cos 0}{1+r^2}$$

Antsän är minsta värdet på f 0.

Största värdet ges av $\max_{r \geq 0} \frac{r}{1+r^2}$

Bilda $h(r) = \frac{r}{1+r^2}$ $h(0) = \lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = 0$

$$h'(r) = \frac{1+r^2 - 2r^2}{(1+r^2)^2} = \frac{(1+r)(1-r)}{(1+r^2)^2} = 0 \iff r=1.$$

$$\underline{\underline{f(1,0) = g(1,0) = h(1) = \frac{1}{2}.$$

Minsta värde 0 och största värde $\frac{1}{2}$.