



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2023-06-07

Skrivtid: 08:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Beräkna det största värdet som uttrycket $xy\sqrt{z}$ kan anta då x , y och z är positiva tal och $x + y + z = 1$.

Lösning: Låt oss använda oss av Lagranges multiplikatormetod. Låt $f(x, y, z) = xy\sqrt{z}$ och $g(x, y, z) = x + y + z$. Vi söker lösningar till

$$\begin{cases} (\nabla f)(x, y, z) = \lambda(\nabla g)(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases}$$

vilket är detsamma som

$$\begin{cases} y\sqrt{z} = \lambda \\ x\sqrt{z} = \lambda \\ xy/2\sqrt{z} = \lambda \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Vi ser från de två översta ekvationerna att

$$x = y = \lambda/\sqrt{z}$$

och insatt i övriga ekvationer får vi

$$\begin{cases} \lambda = 2z^{3/2} \\ z = 1 - 2\lambda/\sqrt{z}. \end{cases}$$

Vi har att

$$z = 1 - 4z$$

och därmed är $z = 1/5$ och $x = y = (1 - z)/2 = 2/5$.

Därmed är det största värdet $f(2/5, 2/5, 1/5) = 4\sqrt{5}/125$. Att detta värde är ett maximum följer av att $f(x, y, z) = 0$ på randen.

2. Skärningen mellan ellipsoiden

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

och planet

$$x - y + 2z = 2$$

är en ellips i rummet. Bestäm en tangentvektor för denna ellips i punkten $(1, 1, 1)$.

Lösning: En tangentvektor för denna ellips måste vara ortogonal mot både planet och ellipsoiden. Planet har överallt normalvektorn $n_1 = (1, -1, 2)$ och ellipsoiden har i den angivna punkten normalvektorn $n_2 = (4, 2, 2)$. Tangentvektorn för ellipsen i punkten $(1, 1, 1)$ blir därför $n_1 \times n_2 = (6, -6, -6)$. Vi kan exempelvis svara med tangentvektorn $(1, -1, -1)$.

3. Beräkna

$$\int_{\gamma} \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right) dx + \frac{x}{x+y} dy,$$

där γ är den del av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ som går från $(0, 1)$ till $(2, 0)$ i första kvadranten.

Lösning: Fältet är konservativt i första kvadranten ty

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y} + \frac{x}{(x+y)^2} = 0$$

Låt oss finna en potential U som uppfyller $\nabla U = (P, Q)$,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x+y}$$

betyder att $U(x, y) = x \ln(x+y) + c(x)$, för någon funktion c . Vi får att $c(x) = 0$ eftersom

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} + c'(x) = P(x, y).$$

Alltså är

$$\int_{\gamma} \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right) dx + \frac{x}{x+y} dy = U(2,0) - U(0,1) = 2 \ln 2.$$

4. Givet en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u = u(x, y)$. Transformera uttrycket

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} s = -\ln x + \ln y \\ t = \ln x + \ln y. \end{cases}$$

Lösning: Låt $u(x, y) = f(T(x, y))$, där $(s, t) = T(x, y)$ är avbildningen som beskrivs i uppgiften. Vi få då

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

och

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

På liknande vis får vi

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

och

$$-2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Alltså får vi tillsammans

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial f}{\partial t} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}.$$

5. Avgör om integralen

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ är konvergent.

Lösning: Vi kan studera integralen på var sin sida av diagonalen $y = x$. Låt först $D_1 = \{(x, y) : x > y > 0\}$ - Vi får

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy &= \int_0^{\pi/4} \int_0^\infty \frac{\cos \theta - \sin \theta}{r(\cos \theta + \sin \theta)^3} dr d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{dr}{r} \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^3} d\theta \end{aligned}$$

Den första integralen här är divergent och den andra integralen är ändlig eftersom funktionen är kontinuerlig och intervallet är kompakt.

Alltså är integralen divergent.

6. Beräkna volymen av det begränsade område som bildas mellan paraboloiden $z = 2x^2 + 5y^2$ och konen $z^2 = 2x^2 + 5y^2$.

Lösning: Skärningen mellan ytorna ges av $z(z-1) = 0$. Alltså ges volymen V av

$$\begin{aligned} V &= \iint_{2x^2+5y^2 \leq 1} \left(\int_{2x^2+5y^2}^{\sqrt{2x^2+5y^2}} dz \right) dx dy \\ &= \iint_{2x^2+5y^2 \leq 1} \left(\sqrt{2x^2+5y^2} - (2x^2+5y^2) \right) dx dy \end{aligned}$$

Låt oss utföra variabelbytet

$$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ y = \frac{r}{\sqrt{5}} \sin \theta \end{cases}$$

som ger att

$$dx dy = \frac{1}{\sqrt{10}} dr d\theta.$$

Vi får

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^2) \frac{r}{\sqrt{10}} dr d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{10}}$$

7. Låt $F(x, y) = (x^2y + y^3 + x - 12y, 24x - y^2 - x^3 - 6xy^2)$. Maximera kurvintegralen

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

över alla enkla, slutna, kontinuerligt deriverbara kurvor γ som innehåller origo och genomlöps moturs. Bestäm kurvan γ och kurvintegralens maximala värde.

Lösning: Låt oss använda Greens formel. Vi har att

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \iint_{\Omega} (36 - 4x^2 - 9y^2) dx dy,$$

där Ω är den mängd som innesluts av γ . Denna dubbelintegral maximeras om vi integrerar över det område där $36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0$. Ekvationen $36 - 4x^2 - 9y^2 = 0$ är detsamma som

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

och beskriver en ellips. Vi får därmed att γ ges av

$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$$

där $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

För att beräkna integralen genomför vi variabelbytet $x = 3r \cos \theta$ och $y = 2r \sin \theta$ och använder att

$$\left| \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} \right| = 6r.$$

Därmed är

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (36 - 4x^2 - 9y^2) dx dy &= 36 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) 6r dr d\theta \\ &= 432\pi \int_0^1 (r - r^3) dr = 432\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 108\pi. \end{aligned}$$

8. Låt Y vara en kompakt yta i $\mathbb{R}^3$ och låt $r: D \rightarrow Y$ och $x: E \rightarrow Y$ vara två bijektiva parameterframställningar av Y av klass C^1 . Definiera vad som menas med arean av Y och visa att definitionen är oberoende av parameterframställning.

Lösning: Arean ges av

$$\iint_D |r'_s(s, t) \times r'_t(s, t)| ds dt.$$

Låt $T: E \rightarrow D$ vara den bijektiva avbildningen som är sådan att $(s, t) = T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v))$ och $r(s, t) = r(T(u, v)) = x(u, v)$.

Enligt kedjeregeln får vi

$$x'_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} (r(s, t)) = \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial u} + r'_t \frac{\partial t}{\partial u} \right)$$

och

$$x'_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} (r(s, t)) = \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial v} + r'_t \frac{\partial t}{\partial v} \right).$$

Vi har nu att

$$\begin{aligned} x'_u \times x'_v &= \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial u} + r'_t \frac{\partial t}{\partial u} \right) \times \left(r'_s \frac{\partial s}{\partial v} + r'_t \frac{\partial t}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} (r'_s \times r'_t) + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} (r'_t \times r'_s) \\ &= \left(\frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} \right) (r'_s \times r'_t) \\ &= \frac{d(s, t)}{d(u, v)} (r'_s \times r'_t) \end{aligned}$$

vilket ger

$$|x'_u \times x'_v| = \left| \frac{d(s, t)}{d(u, v)} \right| |r'_s \times r'_t|.$$

Alltså gäller att

$$\iint_E |x'_u \times x'_v| \, dudv = \iint_E \left| \frac{d(s, t)}{d(u, v)} \right| |r'_s \times r'_t| \, dudv = \iint_D |r'_s \times r'_t| \, dsdt,$$

vilket skulle visas.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!