



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2023-03-17

Skrivtid: 08:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm, 0735587429

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Låt $f(x, y, z) = x^2 + yz$.

- (a) Bestäm riktningsderivatan till f i punkten $(1, 1, 1)$ i riktningen mot punkten $(3, 3, 2)$.
- (b) I vilken riktning från punkten $(1, 1, 1)$ växer f snabbast och hur stor är tillväxten i denna riktning?

Lösning:

- (a) Vi får att

$$(\nabla f)(x, y, z) = (2x, z, y).$$

En enhetsvektor i från $(1, 1, 1)$ mot $(3, 3, 2)$ ges av $v = 1/3 \cdot (2, 2, 1)$.

Alltså är

$$f'_v(1, 1, 1) = (\nabla f)(1, 1, 1) \cdot v = (2, 1, 1) \cdot v = 7/3.$$

- (b) Funktionen f växer snabbast i gradientens riktning. Alltså i riktningen $(\nabla f)(1, 1, 1) = (2, 1, 1)$. Vi har att tillväxten i denna riktning är

$$f'_u(1, 1, 1) = |(\nabla f)(1, 1, 1)| = |(2, 1, 1)| = \sqrt{6},$$

där $u = 1/\sqrt{6} \cdot (2, 1, 1)$.

2. Visa att funktionen

$$f(x, y) = \frac{4y + 3}{1 + x^2 + y^2},$$

har ett största och minsta värde på $\mathbb{R}^2$ och bestäm dessa värden.

Lösning: Först kan vi konstatera att

$$\left| \frac{4y + 3}{1 + x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{4r \sin \theta + 3}{1 + r^2} \right| \leq \left| \frac{4r + 3}{1 + r^2} \right| \rightarrow 0,$$

då $(x, y) \rightarrow \infty$. Alltså kan vi för varje $\varepsilon > 0$ finna ett R sådant att $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ för att (x, y) som uppfyller att $x^2 + y^2 \geq R$.

Vi ser att f är deriverbar överallt och kan därför endast anta största och minsta värde i en inre punkt om punkten är en stationär punkt. Vi söker dessa:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -\frac{2x(4y+3)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f'_y(x, y) = \frac{4(1+x^2+y^2) - 2y(4y+3)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

vilket är detsamma som

$$\begin{cases} x(4y + 3) = 0 \\ 2 + 2x^2 - 2y^2 - 3y = 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger två fall, antingen är $x = 0$ eller $y = -3/4$.

Fallet då $x = 0$. Andra ekvationen ger att $2 - 2y^2 - 3y = 0$, vilket har lösningarna $y = 1/2$ och $y = -2$. Vi får punkterna $(0, 1/2)$ och $(0, -2)$ som ger kandidaterna $f(0, 1/2) = 4$ och $f(0, -2) = -1$.

Fallet då $y = -3/4$. Andra ekvationen blir då $x^2 + 25/16 = 0$ vilket är orimligt.

Alltså är 4 och -1 det största respektive minsta värdet för f .

3. Visa att ekvationen $x^6 + y^6 + x^2 + y = 0$ i en omgivning av $(0, 0)$ entydigt definierar en funktion $y = f(x)$. Bestäm $f''(0)$ och visa att $x = 0$ är en lokal maxpunkt för f . Ni kan anta att f är oändligt deriverbar.

Lösning: Bilda funktionen $F(x, y) = x^6 + y^6 + x^2 + y$. Eftersom $F'_y(x, y) = 6y^5 + 1$ och $F'_y(0, 0) = 1 \neq 0$ så finns det en unik funktion $y = f(x)$ sådan att $F(x, f(x)) = 0$ i en omgivning av $(0, 0)$. Via implicit derivering av

$$0 = F(x, f(x)) = x^6 + f(x)^6 + x^2 + f(x)$$

får vi

$$6x^5 + 6f(x)^5 f'(x) + 2x + f'(x) = 0$$

och eftersom $f(0) = 0$ så blir $f'(0) = 0$. Ytterligare implicit derivering ger

$$30x^4 + 30f(x)^4 f'(x)^2 + 6f(x)^5 f''(x) + 2 + f''(x) = 0$$

och $f''(0) = -2$. Detta visar att $x = 0$ är en stationär punkt och en lokal maxpunkt till f .

4. Beräkna volymen av det området

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, x - y + z \leq 1, x^2 + y \leq 1\}.$$

Lösning: Vi ser att $0 \leq z \leq 1 - x + y$, $0 \leq y \leq 1 - x^2$ och $-1 \leq x \leq 1$ vilket ger att

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x+y} dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (1-x+y) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[(1-x)y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left((1-x)(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 (3/2 - x - 2x^2 + x^3 + x^4/2) dx = \int_0^1 (3 - 4x^2 + x^4) dx \\ &= \left[3x - 4x^3/3 + x^5/5 \right]_0^1 = 3 - 4/3 + 1/5 = 28/15. \end{aligned}$$

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(x+y)f'_x(x,y) + (x-y)f'_y(x,y) = 0,$$

där $x > y$, som uppfyller att $f(x, 0) = e^{x^2}$, genom att nyttja variabelbytet

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 - 2xy \\ v = y \end{cases}.$$

Lösning: Låt g vara den funktion som uppfyller $f(x, y) = g(u, v) = g(u(x, y), v(x, y))$. Enligt kedjeregeln

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2(x-y) \frac{\partial g}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2(x+y) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}. \end{cases}$$

Alltså har vi

$$\begin{aligned} (x+y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x+y)(x-y) \frac{\partial g}{\partial u} - 2(x-y)(x+y) \frac{\partial g}{\partial u} + (x-y) \frac{\partial g}{\partial v} \\ &= (x-y) \frac{\partial g}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$

och därmed är $g(u, v) = h(u)$, för någon funktion h . Låt oss återföra problemet till ursprungsvariablerna

$$f(x, y) = g(u, v) = h(u) = h(x^2 - y^2 - 2xy).$$

Begynnelsevillkoret ger att $f(x, 0) = h(x^2) = e^{x^2}$. Alltså ges lösningen av

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2 - 2xy}.$$

6. (a) Låt U vara en potential till vektorfältet $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och låt γ vara en kurva i $\mathbb{R}^2$. Visa att

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(b) - U(a),$$

där a och b är start- och slutpunkt för γ .

- (b) Låt γ vara den del av kurvan $x^2 + y^2 = 1$ som uppfyller att $y \geq 0$ och orienterad från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$. Bestäm värdet av

$$\int_{\gamma} (xy + \ln(x^2 + 1))dx + (4x + e^{y^2} + 3 \arctan y)dy.$$

Lösning:

- (a) Se boken.

- (b) Låt $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$. Randen till Ω består av γ och $\gamma_0 = \{(t, 0) : -1 \leq t \leq 1\}$. Med hjälp av Greens formel har vi att

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} (xy + \ln(x^2 + 1))dx + (4x + e^{y^2} + 3 \arctan y)dy \\ &= \iint_{\Omega} (4 - x) dx dy - \int_{\gamma_0} \ln(1 + x^2) dx + (1 + 4x) dy \\ &= \iint_{\Omega} 4 dx dy - \int_{-1}^1 (\ln(1 + t^2), 1 + 4t) \cdot (1, 0) dt \\ &= 2\pi - 2 \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = 2\pi - 2 \left[t \ln(1 + t^2) \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt \\ &= 2\pi - 2 \ln 2 + 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \\ &= 2\pi - 2 \ln 2 + 4 - 4 \left[\arctan t \right]_0^1 = \pi - 2 \ln 2 + 4. \end{aligned}$$

7. Beräkna flödet av vektorfältet $u(x, y, z) = (e^{yz}, 2xy - e^z, x^2 - z^2)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, där $z \geq 0$.

Lösning: Låt $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ och $Y_b = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Divergensen av u ges av

$$\operatorname{div} u = 0 + 2x - 2z = 2x - 2z.$$

Enligt divergenssatsen ges det sökta flödet av

$$\begin{aligned} \iint_Y (u \cdot N) dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx \, dy \, dz - \iint_{Y_b} (u \cdot (0, 0, -1)) dS \\ &= 2 \iiint_{\Omega} (x - z) \, dx \, dy \, dz + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \, dx \, dy \\ &= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 1 - x^2 - y^2 \, dx \, dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \frac{3}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy - \pi \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta - \pi \\ &= \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Svar: $-\pi/4$.

8. Låt γ vara en C^1 -kurva av ändlig längd och $F = (P, Q)$ vara ett C^1 -fält. Visa att

$$\left| \int_{\gamma} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \right| \leq ML,$$

där L är längden av γ och

$$M = \max_{(x,y) \in \gamma} \sqrt{P(x, y)^2 + Q(x, y)^2}.$$

Lösning: Låt $r = r(t)$, med $a \leq t \leq b$, vara en parametrisering av γ . Vi får

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right| &= \left| \int_a^b (P(x, y), Q(x, y)) \cdot r'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |(P(x, y), Q(x, y)) \cdot r'(t)| dt. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger oss

$$\begin{aligned} \int_a^b |(P(x, y), Q(x, y)) \cdot r'(t)| dt &\leq \int_a^b |(P(x, y), Q(x, y))| |r'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |r'(t)| dt = ML \end{aligned}$$

eftersom

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt.$$

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!