



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2023-03-17

Skrivtid: 08:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm, 0735587429

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Låt $f(x, y, z) = x^2 + yz$.

- (a) Bestäm riktningsderivatan till f i punkten $(1, 1, 1)$ i riktningen mot punkten $(3, 3, 2)$.
- (b) I vilken riktning från punkten $(1, 1, 1)$ växer f snabbast och hur stor är tillväxten i denna riktning?

2. Visa att funktionen

$$f(x, y) = \frac{4y + 3}{1 + x^2 + y^2},$$

har ett största och minsta värde på $\mathbb{R}^2$ och bestäm dessa värden.

3. Visa att ekvationen $x^6 + y^6 + x^2 + y = 0$ i en omgivning av $(0, 0)$ entydigt definierar en funktion $y = f(x)$. Bestäm $f''(0)$ och visa att $x = 0$ är en lokal maxpunkt för f . Ni kan anta att f är oändligt deriverbar.

4. Beräkna volymen av det området

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, x - y + z \leq 1, x^2 + y \leq 1\}.$$

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(x+y)f'_x(x,y) + (x-y)f'_y(x,y) = 0,$$

där $x > y$, som uppfyller att $f(x,0) = e^{x^2}$, genom att nyttja variabelbytet

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 - 2xy \\ v = y \end{cases}.$$

6. (a) Låt U vara en potential till vektorfältet $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och låt γ vara en kurva i $\mathbb{R}^2$. Visa att

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(b) - U(a),$$

där a och b är start- och slutpunkt för γ .

(b) Låt γ vara den del av kurvan $x^2 + y^2 = 1$ som uppfyller att $y \geq 0$ och orienterad från $(1,0)$ till $(-1,0)$. Bestäm värdet av

$$\int_{\gamma} (xy + \ln(x^2 + 1))dx + (4x + e^{y^2} + 3 \arctan y)dy.$$

7. Beräkna flödet av vektorfältet $u(x,y,z) = (e^{yz}, 2xy - e^z, x^2 - z^2)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, där $z \geq 0$.

8. Låt γ vara en C^1 -kurva av ändlig längd och $F = (P, Q)$ vara ett C^1 -fält. Visa att

$$\left| \int_{\gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy \right| \leq ML,$$

där L är längden av γ och

$$M = \max_{(x,y) \in \gamma} \sqrt{P(x,y)^2 + Q(x,y)^2}.$$

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!