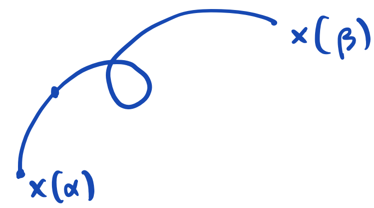
# 9 Kurvor och Ytor

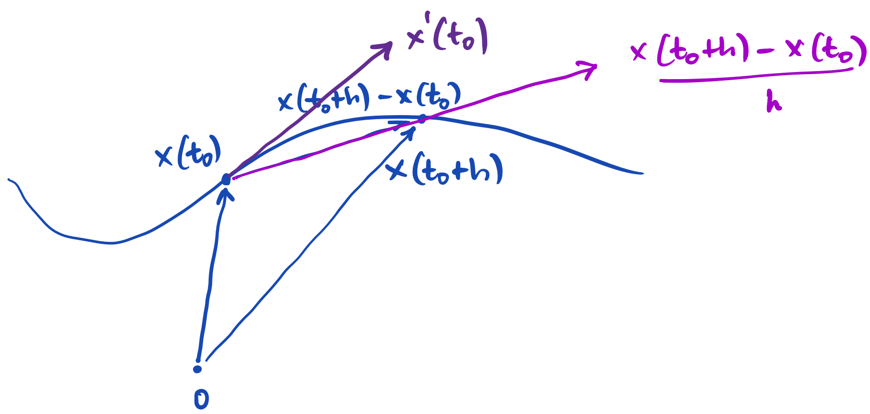
$x : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$




$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

**Derivata:** $x'(t) := \lim_{h \to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, \dots, \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \right) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$




**Anm:** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ Linje i $\mathbb{R}^3$.

$s = 2t$

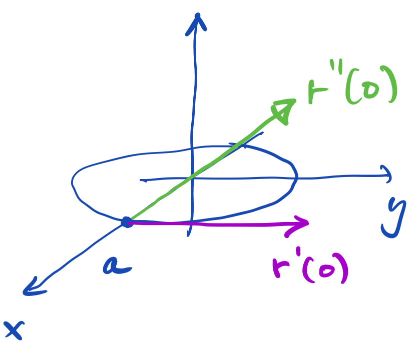
Notera att en parameterförändring $t = \varphi(s)$, $\varphi$ växande funktion ändrar inte derivatans riktning.

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \underbrace{x'(t)}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\varphi'(s)}_{\in \mathbb{R}}$$

Linjen $T = x(t_0) + t\,x'(t_0)$ kallas tangenten till $x$ i punkten $x(t_0)$.

Vi kommer att förutsätta att $x'(t) \neq 0$, för alla $t \in [\alpha, \beta]$.

__Ex:__ (Centralrörelse) $a, b, k > 0$.




$$r(t) = (a\cos(kt),\, b\sin(kt),\, 0)$$

$$r'(t) = (-a \cdot k\sin(kt),\, bk\cos(kt),\, 0)$$

$$r(0) = (a, 0, 0)$$
$$r'(0) = (0, bk, 0)$$
$$r''(t) = (-a \cdot k^2\cos(kt),\, -bk^2\sin(kt),\, 0)$$
$$r''(0) = (-ak^2, 0, 0)$$

$$r''(t) = -k^2 \underbrace{(a\cos(kt),\, b\sin(kt),\, 0)}_{=r(t)} = -k^2 \cdot r(t).$$

__Definition:__ Längden $L$ av en kurva $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ definieras som

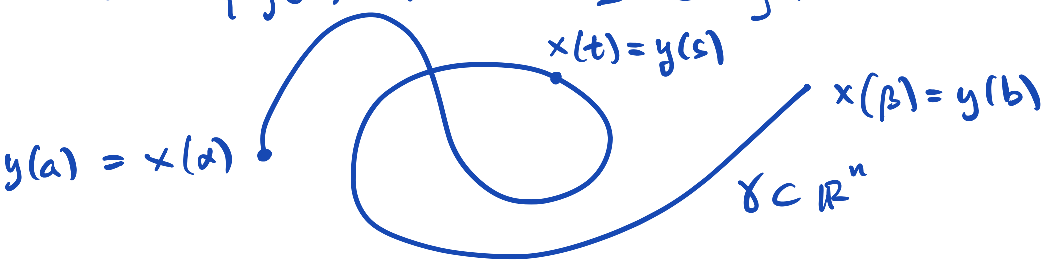
$$L = \int_\alpha^\beta |x'(t)|\, dt.$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\, dt.$$

Om $\underline{d=2}$:


Bilda $\quad \gamma = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : \alpha \leq t \leq \beta\}$

$\gamma = \{y(s) \in \mathbb{R}^n : a \leq s \leq b\}$.




Om även $\gamma = \{y(s) \in \mathbb{R}^n : a \leq s \leq b\}$

$$L_x = \int_\alpha^\beta \left|\frac{dx}{dt}(t)\right| dt \quad , \quad L_y = \int_a^b \left|\frac{dy}{ds}(s)\right| ds \ .$$

Vi vill visa att $L_x = L_y$.

$x(\varphi(s)) = y(s)$

Låt $t = \varphi(s)$ så att $x(t) = y(s)$.

$$L_x = \int_\alpha^\beta \left|\frac{dx}{dt}(t)\right| dt = \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(s) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{ds}} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{\varphi'(s)} \\ dt = \varphi'(s) ds \end{array} \right\}$$

$$= \int_a^b \left|\frac{dy}{ds}(s) \cdot \frac{1}{\varphi'(s)}\right| \cdot \varphi'(s) ds = \int_a^b \left|\frac{dy}{ds}(s)\right| ds = L_y$$

Ty $\varphi'(s) > 0$.

$x(t) = x(\varphi(s)) = y(s)$

$$\frac{d}{ds} y(s) = \frac{d}{ds} x(\varphi(s)) = \frac{dx(\varphi(s))}{dt} \cdot \overbrace{\frac{dt}{ds}}^{\varphi'(s)} .$$

Alltså är $L$ oberoende av parameterframställning

En naturlig parameter:

Studera $s = s(t) = \int_\alpha^t |x'(u)|\,du$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

s strängt växande.

Hur blir $L$ då vi använder $s$ som parameter.

$\frac{ds}{dt} = |x'(t)|$ (Analysens huvudsats)

eller $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|x'(t)|}$

Alltså gäller $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}$.

och därmed är $\left|\frac{dx}{ds}\right| = \left|\frac{x'(t)}{|x'(t)|}\right| = 1$

Vilket medför att

$$L = \int_\alpha^\beta 1 \cdot ds = \int_\alpha^\beta ds = \int_\gamma ds.$$

bågelementet: $ds = |x'(t)|\,dt$

Räkneregler:

- $\frac{d}{dt}(c \cdot x(t)) = c\,x'(t)$
- $\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = x'(t) + y'(t)$

- $\frac{d}{dt}\left(x(t) \cdot y(t)\right) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$.

  Skalärprodukt

- I $d=3$ $\quad \frac{d}{dt}\left(x(t) \times y(t)\right) = x'(t) \times y(t) + x(t) \times y'(t)$.

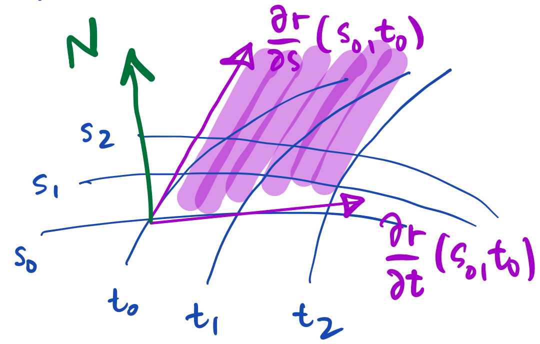
<u>Ytor:</u> $\quad r : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad D \subset \mathbb{R}^2$

$$r(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), x_3(s,t))$$

För fixt $s$ är $\varphi(t) = r(s,t)$ en kurva.

och för fixt $t$ är

$\psi(s) = r(s,t)$ en kurva




Vi förutsätter att $x_j \in C^1(D)$.

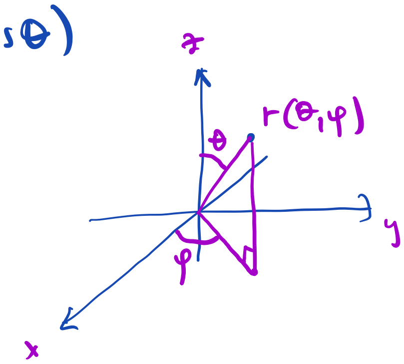
Vi har att $\frac{\partial r}{\partial s}(s_0,t_0)$ och $\frac{\partial r}{\partial t}(s_0,t_0)$ är tangentvektorer till kurvorna $\varphi$ och $\psi$.

Om $\frac{\partial r}{\partial s}$ och $\frac{\partial r}{\partial t}$ ej är parallella så spänner de upp ett plan tillsammans med normalvektor $N$

$$N(s_0,t_0) = \frac{\partial r}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial r}{\partial t}(s_0,t_0)$$

Ex: En parametrisering av enhetssfären är

$$r(\theta,\varphi) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$$




$$D = \{(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta \le \pi\}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (\cos\varphi \cos\theta, \sin\varphi \cos\theta, -\sin\theta)$$

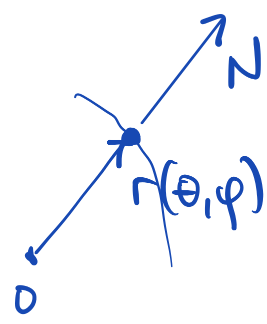
$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi \sin\theta, 0)$$

$$N = \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\varphi \sin^2\theta, \sin\varphi \sin^2\theta, \underbrace{\cos^2\varphi \sin\theta\cos\theta + \sin^2\varphi \sin\theta\cos\theta}_{=\sin\theta\cos\theta})$$

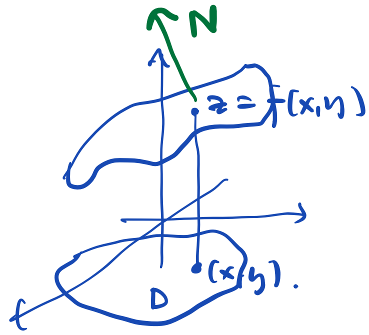
$$= \sin\theta (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$$

$$= \sin\theta \cdot r(\theta,\varphi)$$




Alltså är normalvektorn parallell med $r(\theta,\varphi)$.

Ex: Funktionsytor $z = f(x,y)$, $f: D \to \mathbb{R}$




$$r(x,y) = (x,y,z) = (x, y, f(x,y))$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (1, 0, f'_x)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, f'_y)$$

$$N = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} =$$

$$= (-f'_x, -f'_y, 1)$$

Noter att normalvektorn alltid pekar uppåt.