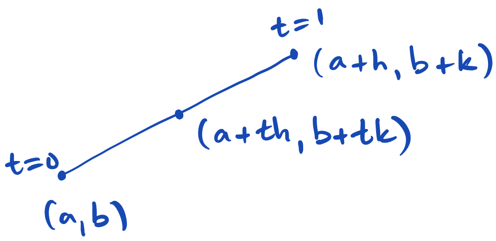
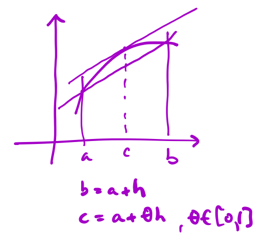
Taylors formel, lokala extrempunkter

Låt $f \in C^3(D)$, $(a,b) \in D$





$\varphi(t) := f(a+th, b+tk)$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Vi kan nyttja Taylors formel för φ.

(*)

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)t^2}{2} + \frac{\varphi'''(\theta t)t^3}{3!}, \quad \text{för något } \theta \in [0,1].$$

Låt oss överföra detta till f.

kedjeregeln

$\varphi(t) = f(a+th, b+tk)$, $\varphi(0) = f(a,b)$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(\varphi(t)) = \frac{d}{dt}\left(f(a+th, b+tk)\right) =$$

$$= f_1'(a+th, b+tk)\cdot\frac{d}{dt}(a+th) + f_2'(a+th, b+tk)\frac{d}{dt}(b+tk)$$

$$= f_1'(a+th, b+tk)h + f_2'(a+th, b+tk)k, \quad \varphi'(0) = f_1'(a,b)h + f_2'(a,b)k$$

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}\left(f_1'(a+th, b+tk)h + f_2'(a+th, b+tk)k\right)$$

$$= f_{11}''(a+th, b+tk)h^2 + f_{12}''(a+th, b+tk)hk + f_{21}''(a+th, b+tk)hk$$

$$+ f''_{22}(a+th, b+tk)k^2$$

$$= f''_{11}(a+th, b+tk)h^2 + 2f''_{12}(a+th, b+tk)hk + f''_{22}(a+th, b+tk)k^2$$

$$\varphi''(0) = f''_{11}(a,b)h^2 + 2f''_{12}(a,b)hk + f''_{22}(a,b)k^2 .$$

$$\varphi'''(t) = f'''_{111}(a+th, b+tk)h^3 + 3f'''_{112}(a+th, b+tk)h^2k$$
$$+ 3f'''_{122}(a+th, b+tk)hk^2 + f'''_{222}(a+th, b+tk)k^3$$

✱

$$f(a+th, b+tk) = f(a,b) + \frac{(f'_1(a,b)h + f'_2(a,b)k)t}{1!}$$
$$+ \frac{t^2}{2!}\left(f''_{11}(a,b)h^2 + 2f''_{12}(a,b)hk + f''_{22}(a,b)k^2\right)$$
$$+ \frac{\varphi'''(\theta t)t^3}{3!}$$

Speciellt får vi för $t=1$:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_1(a,b)h + f'_2(a,b)k$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f''_{11}(a,b)h^2 + 2f''_{12}(a,b)hk + f''_{22}(a,b)k^2\right)$$
$$+ \frac{\varphi'''(\theta)}{3!} \quad , \quad \theta \in [0,1) .$$

Två viktiga iakttagelser. $f'''_{...}(x,y)$ är kontinuerliga. Alltså är $f'''_{...}(x,y)$ för varje omgivning U av (a,b) begränsade av en konstant.

$$|h| \le |(h,k)| \quad , \quad |k| \le |(h,k)| .$$

$|x_i| \le |x|.$
$\le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$B(h,k) := \dfrac{\varphi'''(\theta)}{3! \cdot |(h,k)|^3}$, då gäller att

$$|B(h,k)| = \frac{|\varphi'''(\theta)|}{3! \cdot |(h,k)|^3} \le C$$ (där C är någon konstant)

<u>Sats</u> (Taylors formel ordning 2, $d=2$)
Låt $f \in C^3(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Då gäller att för $(a,b) \in D$

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = f(a,b) &+ \left(f_1'(a,b)h + f_2'(a,b)k\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(f_{11}''(a,b)h^2 + 2f_{12}''(a,b)hk + f_{22}''(a,b)k^2\right) \\ &+ B(h,k) \cdot |(h,k)|^3 , \end{aligned}$$

där B är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

<u>Ex</u>: Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $(\frac{\pi}{2}, 1)$ till funktionen $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{y}$.

$$f_x'(x,y) = \frac{\cos x}{y} \quad , \quad f_x'(\tfrac{\pi}{2}, 1) = 0$$

$$f_y'(x,y) = -\frac{\sin x}{y^2} \quad , \quad f_y'(\tfrac{\pi}{2}, 1) = -1 .$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{-\sin x}{y}, \quad f''_{xx}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = -1$$

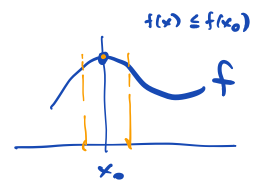
$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{\cos x}{y^2}, \quad f''_{xy}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = 0$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{2\sin x}{y^3}, \quad f''_{yy}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = 2.$$

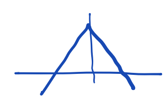
$$p\left(\frac{\pi}{2}+h, 1+k\right) = 1 + \left(0\cdot h + (-1)k\right) + \frac{1}{2}\left((-1)h^2 + 2\cdot 0\cdot hk + 2k^2\right)$$

$$= 1 - k - \frac{h^2}{2} + k^2 \qquad x = \frac{\pi}{2} + h \quad y = 1 + k$$

$$p(x,y) = 1 - (y-1) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + (y-1)^2$$



Lokala extrempunkter:



Definition: Låt $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

Vi säger att f har ett **lokalt maximum** i $a \in D$ om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $f(x) \le f(a)$, för varje $x \in D$ sådant att $|x - a| < \delta$.

Vi kallar då a en **lokal maxpunkt**.

Lokala max- och minpunkter kallas för lokala extrempunkter.

Sats: Om $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt $a \in D$ och om f är partiellt deriverbar i a så gäller att $f'_{x_j}(a) = 0$, för varje $1 \le j \le n$. $\big((\nabla f)(a) = 0 \big)$

Bevis: Bilda $\varphi(t) = f(a_1 + t, a_2, a_3, \dots, a_n)$ för t nära 0.
Antag att extremvärdet är ett maximum.
$\varphi(t) \le \varphi(0)$ för alla t nära 0, eftersom f har ett lokalt maximum.
Alltså från envariabelanalysen får vi att
$\varphi'(0) = 0 \iff f'_{x_1}(a) = 0$.
Detta gäller för varje x_j. ∎

Definition: Låt $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Om $(\nabla f)(a) = 0$ kallas $a \in D$ en stationär punkt.

Låt $f \in C^3(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $a \in D$ stationär punkt.
I en omgivning av a gäller att
$(h = (h_1, h_2)$ litet.$)$

ty a stationär punkt

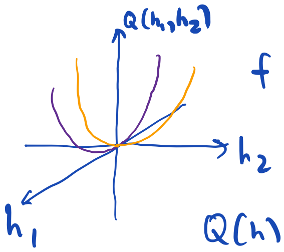
$$f(a+h) = f(a) + 0 + \frac{1}{2}\left(f''_{11}(a) h_1^2 + 2 f''_{12}(a) h_1 h_2 + f''_{22}(a) h_2^2 \right) + |h|^3 B_3(h).$$

Om $A := f''_{11}(a)$, $B := f''_{12}(a)$, $C := f''_{22}(a)$

Kvadratiska formen

$$Q(h) := Ah_1^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2^2 \qquad Q(0)=0$$

är helt avgörande för karaktären av f i punkten a.



f lokalt min i a.

positivt definit

$Q(h) > 0$, då $h \neq 0$.

$$f(a+h) \cong f(a) + \frac{1}{2}Q(h)$$