6 Gradient och Riktningsderivata

Definition: Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara partiellt deriverbar. Gradienten av f i punkten x definieras som

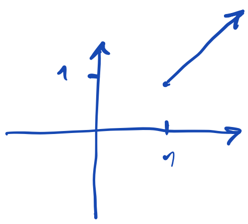
$$(\nabla f)(x) = \text{grad } f(x)$$
$$:= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Notera att $(\nabla f)(x) \in \mathbb{R}^n$, alltså $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Om $d=1$ $\quad (\nabla f)(x) = \left(\frac{df}{dx}\right) \cong \frac{df}{dx}$

Ex: Bestäm ∇f då $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$.

$$(\nabla f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (2x, 2y) = 2(x,y).$$



Anm: Differentierbarhetens definition

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + |h| \rho(h)$$
$$= A \cdot h + |h| \rho(h)$$

Nu vet vi att $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = (\nabla f)(a)$.

$$= (\nabla f)(a) \cdot h + |h| \rho(h).$$

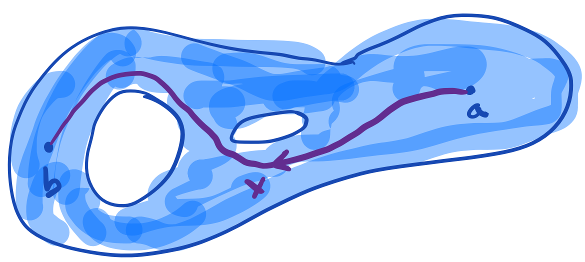
Kedjeregeln: (fortfarande inom anm..)

$$\frac{d}{dt}\left(f(g(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

$$= (\nabla f)(g(t)) \cdot g'(t)$$

$g(t) = x \qquad x_j = g_j(t)$.

Sats: Låt $D \subset \mathbb{R}^n$, vara öppen, bågvis sammanhängande mängd och $f \in C^1(D)$. Om $(\nabla f)(x) = 0$, för varje $x \in D$ så är f konstant i D.



Bevis: Låt $a, b \in D$. Vi vill visa att $f(a) = f(b)$.

Vi kan finna en kurva $x : [0,1] \longrightarrow D$ sådan att $x(0) = a$ och $x(1) = b$.

Studera funktionen $f(x(t)) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

Vi har

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \underbrace{(\nabla f)(x(t))}_{=0} \cdot x'(t) = 0$$

eftersom $\nabla f = 0$.

Vi har en envariabelfunktion med derivatan 0.

$f(x(t)) = C$ (någon konstant).

$f(a) = f(x(0)) = C$ och $f(b) = f(x(1)) = C$.

Alltså är vi klara. ∎

Riktningsderivata:

Definition: Med derivatan av $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i punkten a i riktningen $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ menas gränsvärdet

$$f'_v(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Partiella derivatorna $v = e_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$

Ex: $f(x,y) = x^2 + xy$. Bestäm riktningsderivatan i $(1,1)$ i riktningen $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Lösning: $|v| = \frac{1}{\sqrt{5}} \, |(1,2)| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$ **ok.**

$$\frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}, 1 + t\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - f(1,1)}{t} = \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - 2}{t}$$

$$= \frac{\cancel{1} + \frac{2t}{\sqrt{5}} + \frac{t^2}{5} + \cancel{1} + \frac{3t}{\sqrt{5}} + \frac{2t^2}{5} \cancel{-2}}{t} = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{t}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2t}{5}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}} + t\,\frac{3}{5} \longrightarrow \sqrt{5} \quad \text{då} \quad t \to 0 \qquad \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Sats: Om f är differentierbar och v en given riktning med $|v|=1$ så är

$$f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v.$$

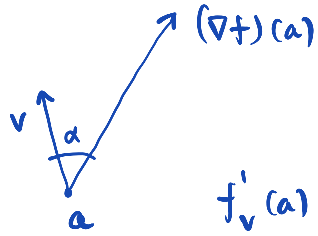
Bevis: Låt $g(t) = a + tv$

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t} = \frac{f(g(0+t)) - f(g(0))}{t}$$

Alltså är

$$f'_v(a) = \frac{d}{dt}(f \circ g)(0) = (\nabla f)(g(0)) \cdot g'(0)$$

$$= (\nabla f)(a) \cdot v \qquad \blacksquare$$



$$f'_v(a) = (\nabla f)(a)\cdot v = |(\nabla f)(a)|\cdot|v|\cdot\cos\alpha$$
$$= |(\nabla f)(a)|\cdot\cos\alpha \le |(\nabla f)(a)|$$

$|f'_v(a)| \le |(\nabla f)(a)|$ med likhet om och endast om $\cos\alpha = 1 \iff \alpha = 0$

Riktningsderivatan $f'_v(a)$ är alltså maximal i gradientens riktning.

<u>Sats:</u> Gradienten $(\nabla f)(a)$ pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast i punkten a, den maximala tillväxten ges av $|(\nabla f)(a)|$.

<u>Bevis:</u> $f'_v(a) = (\nabla f)(a)\cdot v \underset{\uparrow}{\le} |(\nabla f)(a)|\cdot|v| = |(\nabla f)(a)|$

Cauchy-Schwarz olikhet

Likhet gäller då v och $(\nabla f)(a)$ pekar i samma riktning, dvs

$$v = \frac{(\nabla f)(a)}{|(\nabla f)(a)|}$$

(blir då enhetsvektor i samma riktning som $(\nabla f)(a)$).

Ex: Temperaturen i en punkt (x,y) ges av $T(x,y) = x^2 e^{-y}$. I vilken riktning i punkten $(2,1)$ ökar temperaturen mest? Hur mycket ökar den?

Lösning: $(\nabla T)(x,y) = (2x e^{-y}, -x^2 e^{-y})$

$$(\nabla T)(2,1) = (4e^{-1}, -4e^{-1}) = \frac{4}{e}(1,-1).$$

$$|(\nabla T)(2,1)| = \frac{4}{e}|(1,-1)| = \frac{4\sqrt{2}}{e}.$$

Växer snabbast i riktningen $(1,-1)$.
temperaturen ökar då med $\frac{4\sqrt{2}}{e}$ i den riktningen.

Nivåkurvor:

Låt $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Studera nivåkurvan $f(x,y) = C$ för något $C \in \mathbb{R}$.

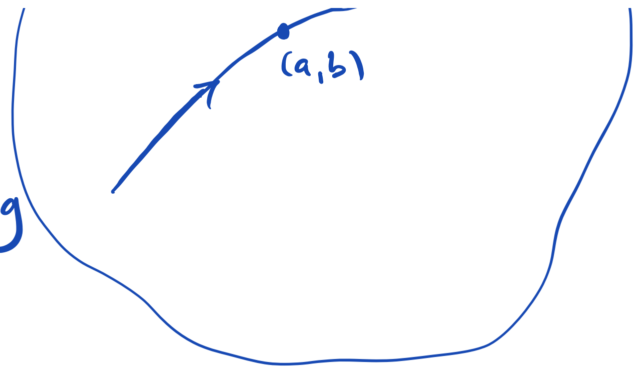
Linjen $y = kx + m$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = kx + m\}$.
Nivåkurvan $f(x,y) = C$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = C\}$.

Låt $(a,b) \in D$ vara en punkt på nivåkurvan $f(a,b) = C$.

och låt $x = x(t)$

$y = y(t)$ vara en parametrisering i en omgivning av (a,b) med

$a = x(t_0) \quad b = y(t_0)$.



Alltså $f(x(t), y(t)) = C$

Kedjeregeln ger

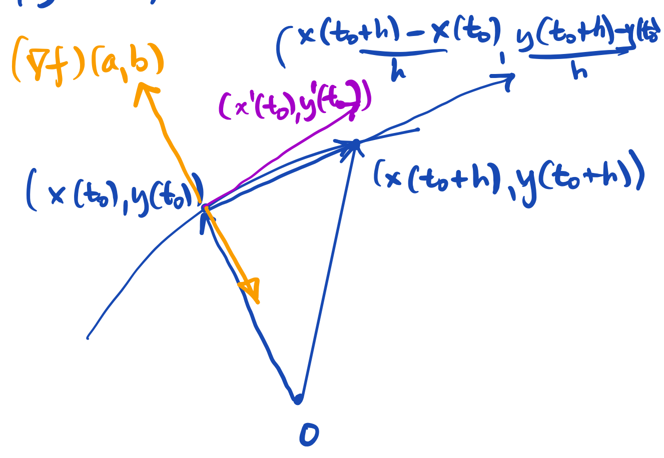
$$0 = \frac{d}{dt}\left(f(x(t),y(t))\right) = (\nabla f)(x(t),y(t)) \cdot (x'(t),y'(t))$$

Speciellt för $t = t_0$.

$$(\nabla f)(x(t_0),y(t_0)) \cdot (x'(t_0),y'(t_0)) = 0$$

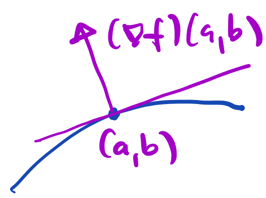
$$(\nabla f)(a,b) \cdot (x'(t_0),y'(t_0)) = 0$$

$$\left(\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}\right)$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Alltså pekar $(\nabla f)(a,b)$ vinkelrät mot linjens riktning.



$f(x,y) = C$