Partiella derivator & Differentierbarhet:

Ex: Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f = f(x,y)$

Fixera $y = b$ och studera $g(x) := f(x,b)$

Om g är deriverbar

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,b) - f(x,b)}{h}.$$

Definition: Låt a vara en inre punkt i definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$ till f. Om gränsvärdet

$$f'_{x_j}(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_j) - f(a)}{h} \quad \text{existerar}$$

så säger vi att f är partiellt deriverbar med avseende på variabeln x_j i punkten a.

$\{e_j\}_{j=1}^{n}$ är standardbasen i $\mathbb{R}^n$.

Notation: f'_{x_1} $\quad f'_x(x,y)$ $\quad f'_1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$

Ex: $f(x,y) = x^2 \cdot \sin(xy)$

$$f'_x(x,y) = 2x\sin(xy) + x^2\cos(xy)\cdot y$$

$$f'_y(x,y) = x^2\cos(xy)\cdot x = x^3\cos(xy).$$

Ex: Låt $f(x,y) = x^y$, $x > 0$. Beräkna $f'_x(2,3)$ och $f'_y(2,3)$.

$$f'_x(x,y) = y x^{y-1}$$

$$f'_x(2,3) = 3\cdot 2^2 = \underline{\underline{12}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\ln x^y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y\ln x}\right)$$

$$= e^{y\cdot\ln x}\cdot\ln x = x^y\cdot\ln x$$

$$f'_y(2,3) = 2^3\cdot\ln 2 = 8\ln 2$$

Ex: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

Beräkna $f'_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(|x|) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_j^2 + \cdots + x_n^2}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left((x_1^2 + \cdots + x_j^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}(x_1^2 + \cdots + x_j^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x_j$$

$$= \frac{x_j}{(x_1^2 + \cdots + x_j^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_j}{|x|}.$$

Ex:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beräkna $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$f(0,0) = 0$$

Men om $y = x = t$

$$f(t,t) = \frac{t \cdot t}{t^2+t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \; t \to 0.$$

De partiella derivatorna $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.
Men funktionen är inte kontinuerlig i $(0,0)$.

Differentierbarhet:

Definition: Låt a vara en inre punkt i definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$ till $f : D \to \mathbb{R}$.
Vi säger att f är differentierbar i a om det finns konstanter $A_1, A_2, \ldots, A_n$ och en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådan att

$$f(a+h) - f(a) = A_1 \cdot h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n + |h| \rho(h)$$
$$= A \cdot h + |h| \rho(h).$$

\rho

och $\rho(h) \to 0$, då $h \to 0$. Om f är differentierbar i alla punkter i D kallas f differentierbar.

Ex: $d=1$: $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) =: \rho(h)$$ (Introducerar vi ρ som skillnaden)

Notera att $\rho(h) \to 0$, då $h \to 0$ eftersom
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to f'(a), \text{ då } h \to 0.$$

$\Longleftrightarrow$
$$f(a+h) - f(a) - h f'(a) = h \rho(h), \text{ där } \rho(h) \to 0, \text{ då } h \to 0.$$

$\Longleftrightarrow$
$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a) + h \rho(h), \text{ där } \rho(h) \to 0, \text{ då } h \to 0.$$

Ex: Låt $f(x,y) = x \cdot y$. Visa mha definitionen att f är differentierbar.

$a = (a_1, a_2)$, $h = (h_1, h_2)$
$a + h = (a_1 + h_1, a_2 + h_2)$

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\
&= (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) - a_1 \cdot a_2 \\
&= \cancel{a_1 a_2} + a_1 h_2 + a_2 h_1 + h_1 h_2 - \cancel{a_1 a_2} \\
&= a_2 h_1 + a_1 h_2 + h_1 h_2 \\
&= a_2 h_1 + a_1 h_2 + |h| \cdot \rho(h)
\end{aligned}$$

då $g(h) = \dfrac{h_1 \cdot h_2}{|h|}$ $\qquad |x_j| \le |x| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j|$

$$0 \le |g(h)| = \frac{|h_1| \cdot |h_2|}{|h|} \le \frac{|h| \cdot |h|}{|h|} = |h| \to 0.$$

Alltså gäller att $g(h) \to 0$, då $h \to 0$.

Sats: Om $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $a \in D$ så är f kontinuerlig i a.

Bevis: Vi vill visa att $f(a+h) - f(a) \to 0$, då $h \to 0$.

Vi vet att det finns konstanter $A_1, \ldots, A_n$ och en funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådan att

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
$$x = a + h$$
$$x \to a \iff h \to 0$$

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n + |h| g(h),$$

och att $g(h) \to 0$, då $h \to 0$.

Alltså gäller

$$0 \le |f(a+h) - f(a)| = |A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n + |h| g(h)|$$

$$\le |A_1| \cdot |h_1| + \cdots + |A_n| \cdot |h_n| + |h| |g(h)|$$

triangelolikheten

$$\le |A_1| \cdot |h| + \cdots + |A_n| \cdot |h| + |h| |g(h)|$$

$$= \underbrace{\left(|A_1| + \cdots + |A_n| + |g(h)| \right)}_{\text{begränsad}} \cdot |h| \to (|A_1| + \cdots + |A_n|) \cdot 0$$

då $h \to 0$.

Sats: En differentierbar funktion $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är partiellt deriverbar med A_j (från definitionen) uppfyller $A_j = f_j'(a)$.

Bevis: Vi vet att det finns tal $A_1, A_2, \dots, A_n$ sådana att

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + |h| g(h),$$

där $g(h) \to 0$, då $h \to 0$.

Tag $h = (0, 0, ..0, h_j, 0, \dots, 0)$

$$\boxed{|h| = \sqrt{h_j^2} = |h_j|}$$

$$f(a + h_j e_j) - f(a) = A_j h_j + |h_j| g(h)$$

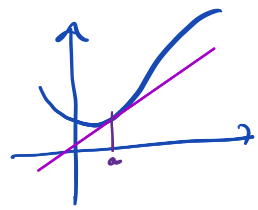
$$\frac{f(a+h_j e_j) - f(a)}{h_j} = A_j + \frac{|h_j|}{h_j} g(h) \to A_j \quad \text{då } h \to 0$$

om $\dfrac{|h_j| \cdot g(h)}{h_j} \to 0$, då $h \to 0$.

$$0 \leq \left| \frac{|h_j| \cdot g(h)}{h_j} \right| = \frac{\cancel{|h_j|} \cdot |g(h)|}{\cancel{|h_j|}} = |g(h)| \to 0, \text{ då } h \to 0.$$

$\blacksquare$

Tangentplan:



Låt $d=2$: Om $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar så

$$\boxed{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) = f'_x(a_1,a_2)h_1 + f'_y(a_1,a_2)h_2} + \underbrace{|h|\,g(h)}_{\text{litet då } h \text{ nära } 0.}$$

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + f'_x(a_1,a_2)h_1 + f'_y(a_1,a_2)h_2 .$$

beskriver tangentplanet för f i punkten $a=(a_1,a_2)$