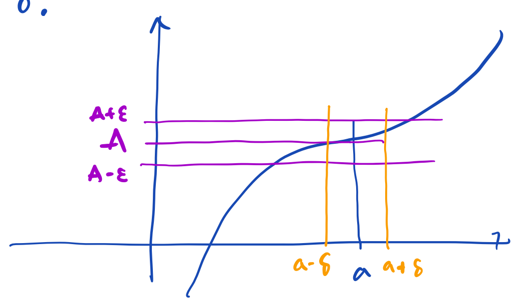
Gränsvärden:

d=1:

Definition: Låt f vara en reellvärd funktion, med $D_f \subset \mathbb{R}$ sådan att varje punkterad omgivning till $x=a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f konvergerar mot $A \in \mathbb{R}$ då x går mot a om det till varje $\varepsilon>0$ existerar ett δ sådant att

$|f(x)-A|<\varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyller att $0<|x-a|<\delta$.

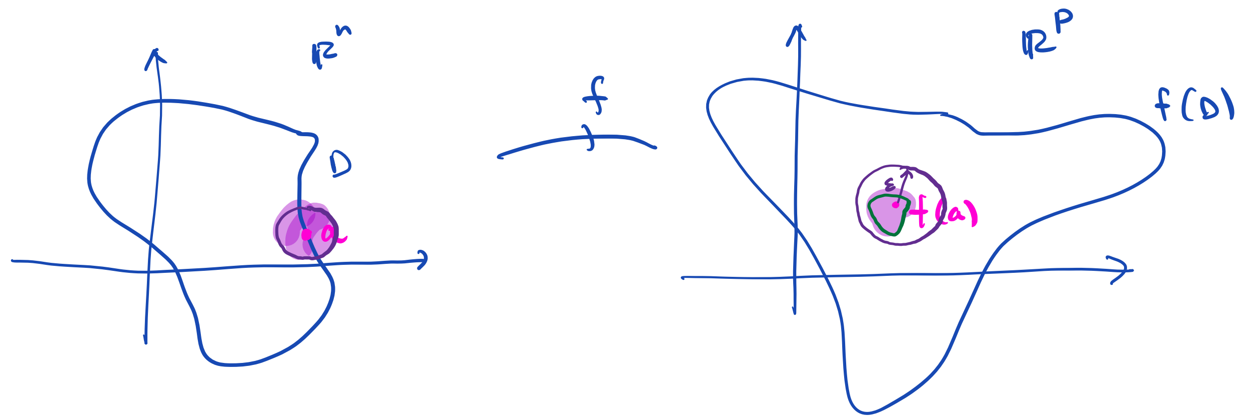


Då $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Definition: Låt $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Låt $a \in \overline{D} = D \cup \partial D$. Vi säger att $f(x)$ konvergerar mot $A \in \mathbb{R}^p$ då x går mot a om det för varje $\varepsilon>0$ existerar ett $\delta \in \mathbb{R}$ sådant att

$|f(x)-A|<\varepsilon$ för varje $x \in D$ som uppfyller att $0<|x-a|<\delta$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$



Ex: Använd definitionen för att visa att

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (x+y^2) = 11 .$$

Lösning: Vi vill visa att för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett δ sådant att

$$|x+y^2-11| < \varepsilon \quad \text{för varje } 0 < |(x,y)-(2,3)| < \delta .$$

$$|(x,y)-(2,3)| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$|x+y^2-11| = |x-2+y^2-9|$$

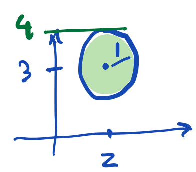
triangel olikheter

$$\le |x-2| + |y^2-9| = |x-2| + |(y-3)(y+3)|$$

$$= |x-2| + |y-3|\cdot|y+3|$$

Låt oss välja $\delta \le 1$.

$$\le |x-2| + |y-3|\cdot 7 \qquad (\text{eftersom } y \le 4)$$



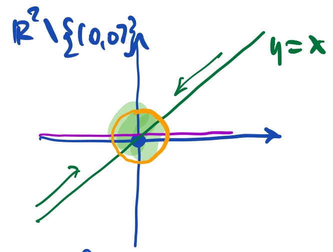
$$= \sqrt{(x-2)^2} + 7\sqrt{(y-3)^2}$$

$$\le \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} + 7\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$= 8\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 8|(x,y)-(2,3)| < 8\delta \le \varepsilon$$

Välj alltså exempelvis $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$

<u>Ex:</u> Visa att $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ saknar gränsvärde i origo.



$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$x=t,\ y=0.$

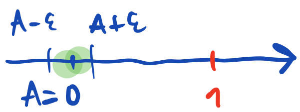
$f(t,0) = \frac{2\cdot t\cdot 0}{t^2+0^2} = 0 \longrightarrow 0$, då $t\to 0$.

$t \neq 0.$

$x=y=t$

$f(t,t) = \frac{2t^2}{t^2+t^2} = 1 \longrightarrow 1$, då $t\to 0$.

f



Detta ger att gränsvärdet saknas.

<u>Sats:</u> Låt f, g och h vara funktioner definierade på $D \subset \mathbb{R}^n$ med värden i $\mathbb{R}^p$. Låt $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Då gäller följande

i) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = A+B$

$f(x)\cdot g(x) = f_1(x)g_1(x) + \dots + f_n(x)g_n(x).$

ii) $p=1$. $\lim_{x\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = A\cdot B$

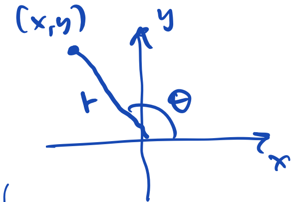
iii) $p=1$ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, $B\neq 0$.

om även $\lim_{x\to a} h(x)$ existerar

(iv) $(p=1)$ om $f(x) \le h(x) \le g(x)$, $\forall x$ i en omgivning till a.

så gäller att $A \le \lim_{x \to a} h(x) \le B$.

Ex: Bestäm $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.



Lösning: Byt koordinater $\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = r^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0+} r^2 \ln r^2$$

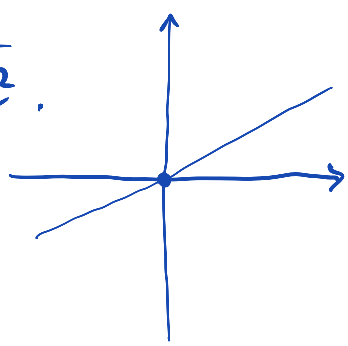
$$= \left\{ r^2 = s \right\} = \lim_{s\to 0+} s\ln s = \left\{ s = \frac{1}{t} \right\} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0$$ pga standardgränsvärde.

Ex: (jobbigt)

Finns gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$?

$f(x,y) := \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$.

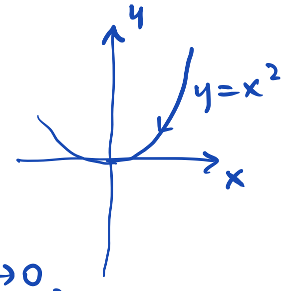


$y=kx$, $x=t$, $y=kt$

$$f(t,kt) = \frac{2t^2 \cdot kt}{t^4 + k^2t^2} = \frac{2kt}{t^2+k^2} \longrightarrow \frac{0}{k^2} = 0, \text{ då } t \to 0$$

$$f(0,t) = 0, \quad f(t,0) = 0$$

Studera nu fallet då $x = t$, $y = t^2$.



$$f(t,t^2) = \frac{2t^2 \cdot t^2}{t^4+t^4} = \frac{2t^4}{2t^4} = 1 \longrightarrow 1, \text{ då } t \to 0.$$

Alltså saknas gränsvärde.

Ex: Visa att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x^2| \cdot |y|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{\cancel{|x^2+y^2|} \cdot |y|}{\cancel{|x^2+y^2|}}$$

$$= |y| \leq |(x,y)| \longrightarrow 0, \text{ då } (x,y) \to (0,0).$$

■

Gränsvärden vid ∞:

Definition: Vi säger att $f(x) \to b$, då $|x| \to \infty$ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett ω sådant att

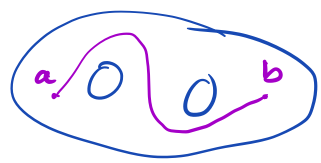
$|f(x)-b|<\varepsilon$ givet att $|x|>\omega$, $x\in D_f$.

Kontinuitet: Låt $f: D\to \mathbb{R}^p$, $D\subset\mathbb{R}^n$. Vi säger att f är kontinuerlig i $x=a\in D$ om

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Sats: Om f är reellvärd, kontinuerlig funktion med kompakt definitionsmängd D_f så har $f(x)$ ett största och minsta värde på D_f.

Satsen om mellanliggande värde:



En mängd D sägs vara bågvis sammanhängande om det till varje par $a,b\in D$ finns en kontinuerlig kurva $t\mapsto x(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ sådan att $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ och $x(t)\in D$.

Sats: Låt f vara en reellvärd kontinuerlig funktion på en bågvis sammanhängande mängd D. Om f antar två värden A och B så antar f alla värden mellan A och B.

Bevis: Applicera envariabelvarianten på funktionen $t\mapsto f(x(t))$. Sammansättning av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.