

• Taylors formel, Lokala extrempunkter, Stationära punkter

x_0 är en minpunkt till f om det finns en boll B kring x_0 så att $f(x_0) \leq f(x)$, för varje $x \in B$.

Om f är partiellt deriverbar i x_0 så gäller att $(\nabla f)(x_0) = 0$

eftersom $\varphi(t) = f(x_1 + t, x_2, x_3, \dots, x_n)$ har ett lokalt min för $t=0$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Ex: Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Stationära punkter: $\nabla f = 0$

$$\nabla f = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = y, y^3 = x$$

$$\text{Antag måste } x^9 = x \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=\pm 1.$$

$$x=0 \text{ ger } (0,0)$$

$$x=1 \text{ ger } (1,1)$$

$$x=-1 \text{ ger } (-1,-1)$$

Punkten (0,0): $Q(h,k) = -4hk$ indefinit, Sadelpunkt.

Punkten (1,1): $f'_x = 4x^3 - 4y$ $f'_y = 4y^3 - 4x$
 $f''_{xx} = 12x^2$ $f''_{yy} = 12y^2$ $f''_{xy} = -4$.

$$f''_{xx}(1,1) = f''_{yy}(1,1) = 12 \quad f''_{xy} = -4$$

$$\begin{aligned} Q(h,k) &:= \frac{1}{2} (12h^2 - 4hk + 12k^2) = 6h^2 - 2hk + 6k^2 \\ &= 6 \left(h^2 - \frac{1}{3}hk + k^2 \right) = 6 \left(\left(h - \frac{k}{6} \right)^2 + k^2 - \frac{k^2}{36} \right) \\ &= 6 \left(h - \frac{k}{6} \right)^2 + \frac{35}{6}k^2 \quad \text{positivt definit.} \\ &\quad f \text{ har minimum.} \end{aligned}$$

punkten (-1,-1):

$$Q(h,k) = \frac{1}{2} (12h^2 - 4hk + 12k^2) \quad \text{positivt definit.}$$

• Funktionalmatriser, funktionaldeterminanter

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{om } p=n \quad \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_n)} = \det \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right).$$

5. (4 poäng) Är avbildningen

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases}$$

bijektiv i en omgivning av (1,1)? Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$ och $\frac{\partial x}{\partial u}(0,2)$.

Bilden $f(x,y) = (u,v) = (x^2 - y^2, 2xy)$

$$\frac{\partial(f)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0)$$

Anteck är f bijektiv i en omgivning av $(1,1)$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

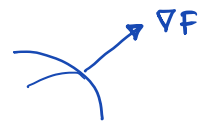
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anteck är $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{4}$.

$$\frac{\partial(f)}{\partial(u)} \cdot \frac{\partial(u)}{\partial(x)} = \frac{\partial(f)}{\partial(x)}$$

6. (4 poäng) Visa att ekvationen $x^3 + 2y^3 + z^3 + 5x^2z = 9$ entydigt definierar en C^1 -funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$ i en omgivning av $(x,y) = (1,1)$. Bestäm riktningsderivatan $z'_v(1,1)$ där $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Bilden $F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 + 5x^2z - 9 = 0$



$$F'_z(x,y,z) = 3z^2 + 5x^2 \quad F'_z(1,1,1) = 8 \neq 0.$$

Anteck finns $z = z(x,y)$ i en omgivning av $(1,1,1)$

$$z'_v(1,1) = (\nabla z)(1,1) \cdot (1,1) \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)}, -\frac{F'_y(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} \right) \cdot (1,1) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F'_x = 3x^2 + 10xz \quad F'_x(1,1,1) = 19$$

$$F'_y = 6y \quad F'_y(1,1,1) = 6$$

$$= \left(\frac{-13}{8}, \frac{-6}{8} \right) \cdot (1,1) \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{-19}{8\sqrt{2}}}}$$

3. (4 poäng) Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen

$$f(x, y) = (y - x)e^{x^2 - y}$$

antar i området $x^2 \leq y \leq x$.

Stationära punkter:

$$f'_x = -e^{x^2 - y} + (y - x)2xe^{x^2 - y} = e^{x^2 - y}(2xy - 2x^2 - 1)$$

$$f'_y = e^{x^2 - y} + (y - x)(-1)e^{x^2 - y} = e^{x^2 - y}(x - y + 1)$$

$$f'_x = f'_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2xy - 2x^2 - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

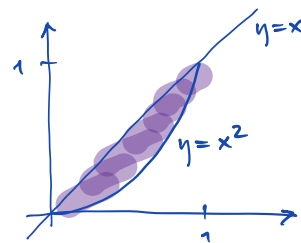
$$(2): y = 1 + x \quad \text{insätt i (1): } 2x(1+x) - 2x^2 - 1 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad y = \frac{3}{2}.$$

$$x^2 \leq y \leq x$$

Punkten $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ligger ej i vårt område.



Max och min finns alltså på randen.

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = 0$$

$$\gamma_1 = \{(t, t) : 0 \leq t \leq 1\} \quad \varphi_1(t) = f(t, t) = 0.$$

$$\gamma_2 = \{(t, t^2) : 0 \leq t \leq 1\} \quad \varphi_2(t) = f(t, t^2) = (t^2 - t)e^0 = t^2 - t.$$

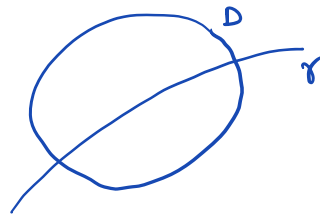
$$\varphi_2'(t) = 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

$$\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Ansä är max $\frac{1}{2}$ och min $-\frac{1}{4}$.

Optimering med bivillkor

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$$



Söker extremvärden för f

på γ . Låt $r = r(t)$ vara en parametrisering av γ och
låt $r(t_0)$ vara en extrempunkt för $f(r(t))$.

$$\text{Ansä} \quad \left. \frac{d}{dt} (f(r(t))) \right|_{t=t_0} = 0. \quad (\text{envariabelanalys})$$

$$(\nabla f)(r(t_0)) \cdot r'(t_0) = 0. \quad \text{Ansä är } \nabla f \text{ ortogonal mot } \gamma.$$

Om γ är given som en nivåkurva $g(x, y) = 0$

så gäller även att ∇g är ortogonal mot γ .

$$\text{Ansä} \quad \nabla f = \lambda \nabla g.$$

6. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y$ på området D som ges av $2x^2 + y^2 \leq 12$.

Låt oss betrakta f på randen.

$$\nabla f = (4x - 4, 2y + 2)$$

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 12 = 0$$

$$\nabla g = (4x, 2y).$$

$$\text{Antag } \nabla f = \lambda \nabla g \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = \lambda 4x \\ 2y + 2 = \lambda 2y \\ 2x^2 + y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad \lambda = \frac{4x - 4}{4x} = \frac{x - 1}{x}. \quad \text{Insatt i (2): } x(2y + 2) = (x - 1)2y$$
$$2xy + 2x = 2xy - 2y$$
$$x = -y.$$

$$\text{Insatt i (3): } 2y^2 + y^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 2.$$

Extrempunkter på randen kan endast förekomma i $(-2, 2), (2, -2)$

$$f(2, -2) = 8 - 8 + 4 - 4 = 0 \quad f(-2, 2) = 8 + 8 + 4 + 4 = 24.$$

Stationära punkter $\nabla f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1, y = -1.$

$$f(1, -1) = 2 - 4 + 1 - 2 = -3$$

Största värde 24 minsta värde -3.