Repetition I

Gränsvärden, kontinuitet, Partiella derivator, Differentierbarhet.

1. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+2y^3+x^4}{x^2+2y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Avgör om funktionen f är kontinuerlig i punkten $(0,0)$.
(b). Avgör om f är partielt deriverbar i punkten $(0,0)$; beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ om de finns.
(c). Avgör om funktionen f är differentierbar i $(0,0)$;

Vad menas med att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ har gränsvärdet A då $x \to a$?

Svar:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ har gränsvärdet A då $x \to a$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $\underbrace{|f(x) - A|}_{\text{avstånd i } \mathbb{R}^p} < \varepsilon$ då $\underbrace{|x - a|}_{\text{avstånd i } \mathbb{R}^n} < \delta$.

Vad menas med att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ är kontinuerlig i a?

Svar:

Det betyder att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

1a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+2y^3+x^4}{x^2+2y^2}$$

$$\left| \frac{2x^3+2y^3+x^4}{x^2+2y^2} \right| = \left| \frac{2r^3\cos^3\theta + 2r^3\sin^3\theta + r^4\cos^4\theta}{r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta} \right| = \left| \frac{r\,(2\cos^3\theta + 2\sin^3\theta + r\cos^4\theta)}{1+\sin^2\theta} \right|$$

$$\leq \left| \frac{r\,(4+r)}{1} \right| = 4r + r^2 \longrightarrow 0, \quad \text{då } r \to 0.$$

Vad menas med att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är partiellt deriverbar i a med avseende på x_j?

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är partiellt deriverbar i a med avseende på x_j om

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+he_j) - f(a)}{h} \quad \text{existerar.}$$

1b) $$\lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3 + h^4}{h^3}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2+h) = 2 \qquad \text{Alltså är } f'_x(0,0) = 2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3}{2h^3} = 1.$$

Alltså är $f'_y(0,0) = 1$

Vad menas med att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $a \in \mathbb{R}^n$?

Notis från $d=1$: $\quad \rho(h) = f'(a) - \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \to 0$, då $h \to 0$.

$$\Leftrightarrow \quad f(a+h) - f(a) = \underbrace{f'(a)}_{A} h + h\, \rho(h)$$

För $d=1$: Differentierbarhet är samma som deriverbarhet

f är differentierbar i a om det finns konstanter $A_1, A_2, \dots, A_n$ och en funktion $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådan att

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n + |h| \varrho(h),$$

där $\varrho(h) \to 0$, då $h \to 0$.

1c) $f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) = f(h_1,h_2)$

$$= \frac{2h_1^3 + 2h_2^3 + h_1^4}{h_1^2 + 2h_2^2} = 2 \cdot h_1 + 1 \cdot h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \left(\frac{2h_1^3 + 2h_2^3 + h_1^4}{h_1^2 + 2h_2^2} - 2h_1 - h_2 \right) \right)}_{= \varrho}$$

$$\varrho(h) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \left(\frac{\cancel{2h_1^3} + \cancel{2h_2^3} + h_1^4 - \cancel{2h_1^3} - 4h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2 - \cancel{2h_2^3}}{h_1^2 + 2h_2^2} \right) = \frac{h_1^4 - 4h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2 + 2h_2^2)}$$

Då $h_1 = h_2 = t$: $\varrho(h) = \dfrac{t^4 - 5t^3}{\sqrt{2}t\,(3t^2)} = \dfrac{t-5}{3\sqrt{2}} \to -\dfrac{5}{3\sqrt{2}} \neq 0.$

Alltså är f ej differentierbar.

<u>T7</u>: Visa att om f är differentierbar i a så är f kontinuerlig i a.

$$|f(a+h) - f(a)| = |(\nabla f)(a) \cdot h + |h| \varrho(h)| \leq |(\nabla f)(a) \cdot h| + |h| \cdot |\varrho(h)|$$

$$\leq |(\nabla f)(a)| \cdot |h| + |h| \cdot |\varrho(h)| = |h| \underbrace{\left(|(\nabla f)(a)| + |\varrho(h)| \right)}_{\text{begränsad}} \to 0, \text{ då } h \to 0$$

- C^j-klassen, Kedjeregeln.

4. (4 poäng) Transformera f''_{xy} till de nya variablerna

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = xy. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial v} + y\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} + y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} + v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

- Riktningsderivata, Nivåkurvor, Nivåytor

Vad menas med riktningsderivata?

Def: Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $|v| = 1$, $v \in \mathbb{R}^n$, vi definierar

$f'_v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$ som riktningsderivatan i punkten a längs riktningen v.

Notera att om $g(h) = a + hv$ så har vi

$g'(h) = v$ och $\frac{f(a+hv) - f(a)}{h} = \frac{f(g(h)) - f(g(0))}{h}$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(f(g(h))\right)\Big|_{h=0} = (\nabla f)(g(0)) \cdot g'(0) = (\nabla f)(a) \cdot v$$

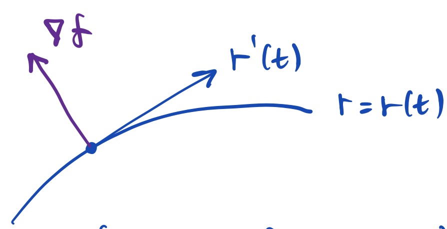
Alltså $f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v$.

Cauchy-Schwarz olikhet ger oss att

$$f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v \leq |(\nabla f)(a)| \cdot |v| = |(\nabla f)(a)|$$

Likhet då v är i samma riktning som $(\nabla f)(a)$.

Nivåkurvor:



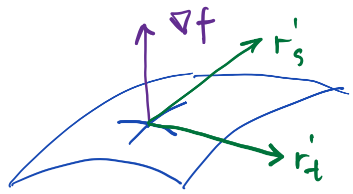
$\gamma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$.

Alltså gäller att $f(r(t)) = 0$ och därmed är

$$0 = \frac{d}{dt}\left(f(r(t))\right) = (\nabla f)(r(t)) \cdot r'(t) = 0$$

$\Rightarrow$ Gradienten till en nivåkurva är ortogonal mot tangenten.

För nivåytor $Y = \{ (x,y,z) : f(x,y,z) = 0 \}$.



$r = r(s,t)$, $(s,t) \in D$.

Följer av samma räkning som för nivåkurvor för fixt s eller t.

2. Avgör om planet $x + 2y + z = -2$ är ett tangentplan till ytan
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Bilda $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ och studera nivåytan $f(x,y,z) = 0$.

En normalvektor till ytan ges av $n = \frac{(2x, 2y, -2z)}{2} = (x, y, -z)$

$n = k(1,2,1)$. Alltså måste $x = k$, $y = 2k$, $-z = k$

$f(x,y,z) = f(k, 2k, -k) = k^2 + 4k^2 - k^2 = 1 \iff k = \pm\frac{1}{2}$.

Punkterna $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ ligger alltså på ytan och har en normalvektor som sammanfaller med planets normalvektor.

$(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ ligger inte i planet ty $\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 2 \neq -2$

$(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ ligger i planet ty $-\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -2$.